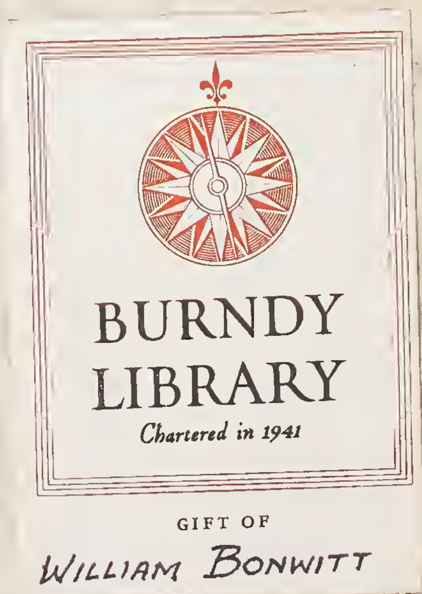
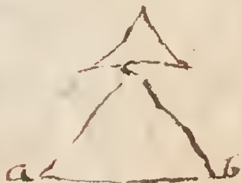





a
b

Aritmetices, Algebræ, ac Geometriæ
Institutiones
in Regio Taurinensi Athenæo traditæ
A Philippo Revelli Monasteriensi
anno 1757.

Gasparis Antonij
Manera Clerici

1757

Fr. V. G. Manera. O. P. N.

Præfatio

Cum animadverterim solere esse studiosiorum adolescentium cupiditatem, ac desiderium, ut cum primum aliqui ex liberalibus disciplinis operam navare velint, id ad se utilitatis atque ornamenti perventurum sit, diligentius inquirant. Quamquam vero ne utiquam dubitandum sit, quin ~~optima~~ omnia optimarum artium studia emolumenti sane plurimum afferre consueverint, tamen cum ex iis aliqua tradenda suscipitur haud incommode in ipso veluti tractationis limine nonnulla videntur esse dicenda, quibus et juvenum animi quodamodo permoveri, atque adlici queant simulque peculiares [illegible], quum suscepturi sunt disciplinæ dotes ostendantur. Itaque non abs re facturum puto, si Geometriam vobis, et Arithmeticam traditurus, paucis ea initio commendem: quod nisi mea me fallit opinio, melius quidem a me præstari nequit quam si præclarissimorum quorundam hominum testi=

moniis putat. Siquidem ipsorum
major pars non ea scripsere,
quae passim laudari a multis
audierint. sed quorum usum,
et exercitationem sibi aliisque
bene multis maxime profuisse
facile perspexerunt. Atque ut
aratus ab Jove incipiendam putat
ita nos vitae caput a Platone
videmur; neque enim immerito
divinus est appellatus. His
igitur cum multa passim
de Geometriae laudibus dixit,
Tum praeclaram omnino de ea
libro septimo de Rep. sententiam
protulit. Geometria, inquit, ejus
quod est semper, cognitio est.
Attollet igitur ad veritatem ani=
=mum, atque ita, ad filoso=
fandum praeparabit cogitationem
ut ad supera convertamus, quae
nunc, contra quam decet, ad infe=
riora dejicimus. Quam maxime igitur
praecipiendum est, ut qui prae=
clarissimam hanc habitant civi=
tatem, nullo modo Geometriam
spernant. Nam quae praeter
ipsius propositum quodammodo
esse videntur, ad exigua sunt,
quin etiam scimus ad disciplinas

omnes facultas perdiscendas
interesse omnino, attigeritque
Geometriam aliquis, an non.
Non multum ad similia sunt
ejus ~~quod et semper cognitio est~~
quae scripsit Plutarcus, non
excellens modo historiarum
auctor, sed eximius etiam
Philosophus, Geometria (haec
sunt illius verba) maxime
quam Philo reliquarum princi:
pem, et Metropolim vocat
excitat, et convertit intellectum
veluti repurgatum, et paulatim
a sensu liberatum.
Ne vero Ethicorum duntaxat
hominum auctoritate niti
videamur, etiam divus Hieronimus
Geometriam magnam Theologis
afferre utilitatem asserit.
Divo Hieronimo conuenit divus
Augustinus, qui de matematicis
disciplinis disputans, sic ait,
hoc genus disciplinarum
exercet animum, ad subtiliora
cernenda, ne luce illorum re:
percussus, et ea sustinere non
valens, in eas tenebras, quas
fugere cupiebat, libenter refugiat

Quod vero ad Aritmeticam spectat
Literam ex Platonis sententia refe=
=remus Levnis igitur inquit in eo:
dem libro septimo de Rep: hanc
veveva peritiam, hujus disciplinae
nobis necessariam esse, quandoquidem
ut apparet, animum ad hoc inducit
ut ipse intelligentia purata, ad
veritatem ipsam percipiendam
atque homines natura Aritmetici
ad omnes doctrinas, ut ita dixerim
ac uti videntur, quin etiam, siqui
ingenio tardiores huic se studio
dederint, si nullam utilitatem aliam
susceperint, tamen hoc assequentur
ut acutiores, quam antea sint. Et
Divus Augustinus in libris de
doctrina Christiana demonstrat
ob numerorum inscitiam plurima
in sacris litteris ignorari. In
eadem prorsus fuerunt sententia
divi Hieronimus, et Gregorius,
Nazianzenus, quorum alter asserit
magnam numeris inesse vim, ad
multa misteria in sacris scripturis
intelligenda; alter vero summis
laudibus divum Basilium cele=
=brat, quod is in Geometria,
numerorum scientia, ceterisque
matematicis disciplinis fuerit
non mediocriter versatus.

Plurimi etiam doctissimi viri Geometriæ, et arithmetices studium pluris studiosis summopere commendarint, Geometria enim, ut ajunt, illustrat doctrinam de servitute itineris, actus, et viæ de accessione, de alveo derelicto, de terminis constituendis de divisione agrorum ~~&c~~: et arithmetices præsidio facilius demonstrantur discrimen justitiæ commutativæ, et distributivæ doctrina de hæreditatibus, et legitima, de quarta falcidia, et trebellianica de jure accrescendi, de jactu de societate ~~&c~~ et ne in hisce rebus longiores simus quam tempus, et institutio nostra sinat, id veteris mentibus, et alcius insideat, plurimos ex veteribus Philosophos, in scholis suis eos noluisse juvenes recipere, qui disciplinis ~~[illegible]~~ haud quaquam imbuti essent. Tandem ipsa experientia apertissime demonstrabit, quod Plato scripsit in Epinomide, neminem videlicet qui, et non cognoverit, facile assecuturum, divinam originem et eorum, quæ ad visum expo=

exposita sunt pulcherrimam, et divinissimam naturam, quam Deus hominibus conspiciendum dedit. Quare invocato Dei O. M. subsidio jam ad rem nostram veniamus.

Praenotiones.

Prima

Definitio est oratio, explicans naturam alicujus rei, [illegible] vocem illam, qua ad eandem rem significandam utimur.

Definitiones distinguuntur in reales, quae rerum genesim, hic est modum, quo fieri possunt res illae exponunt, et nominales, in quibus enumerantur partes, vel notae ad res, de quibus agitur ab aliis distinguendas sufficientes.

Secunda.

Propositio, est oratio, in qua aliquid menti nostrae contemplandum exhibetur.

Quaelibet autem propositio duas continet partes, hipotesim, nempe, et tesim: ~~Hip~~ ....

Hipotesis conditiones recenset, sub quibus aliquid affirmatur, vel negatur.

Thesis vero continet id, quod, vel affirmatur, vel negatur.

Tertia

Teorema igitur ea propositio, in qua aliquid demonstrandum proponitur.

Praecipua Theorematis partes sunt.

Propositio in qua enunciatur quid rei cuidam sub certis conditionibus convenire possit, quid non,

Et Demonstratio, in qua rationes exponuntur, ob quas intellectus illud ipsi rei convenire intelligit, atque concludit.

Quarta

Problema vocatur propositio illa, in qua aliquid faciendum jubetur.

Problemata tribus constant partibus.

Propositione, in qua quid faciendum sit indicatur.

Resolutione in qua singuli actus quibus efficitur, quod erat faciendum, ordine decenti, recensentur, et

Demonstratione, in qua, factis iis, quae in resolutione praecipiuntur, evincitur, effectum intentum obtineri.

6

Quinta

Lemma, vel præsuntio, apellatur propositio illa, quæ alteri propositioni veluti principaliori, demonstrandæ inservit, et seorsim ab illa ponitur, ne series propositionum perturbetur.

Sexta

Axioma, vel pronunciatum, vel effatum dicitur propositio illa, cujus veritas adeo certa, et evidens res, ut cuilibet menti, absque ulla demonstratione, statim affulgeat, sive

Quidquid ex consideratione eorum, quæ in una definitione continentur, immediate deducitur, et aliquid rei convenire, aut non convenire enuntiat Axioma appellatur, vel pronunciatum, vel effatum.

Septima

Postulatum, est problema ita facile, et evidens, ut nulla indigeat resolutione, neque demonstratione, sive

Quidquid ex una definitione immediate deducitur, et aliquid fieri posse affirmat, vel negat Postulatum vocatur.

Octava

Corrolarium, vel consectarium appellatur propositio illa, quæ ab alia propositione jam demonstrata

facile deducitur; sive est aplicatio propositionis generalis ad casum specialem.

Nona

Scolium dicitur id, quod definitionibus, vel propositionibus, vel corrolariis subjungitur, quando aliquid peculiari notatione dignum continet. In scoliis nempe obscura declarantur, ad dubia respondetur, doctrinarum usus indicatur, historia, ad fontes inventionum describuntur, et siqua alia sicut digna occurrunt, inferuntur.

Decima

Quantitas, vel magnitudo dicitur id omne, quod partes habet vel habere concipitur; sive quidquid augeri vel minui potest. Hujus generis sunt corpus, superficies, lineaq. numerus, tempus, motus, velocitas, mensura, pondus &c.

Undecima

Discreta, vel disjuncta quantitas vocatur illa, quae ex discretis, sejunctisque partibus componitur, ut numerus.

Duodecima

Continuum, seu quantitas continua illa est, cujus partes continuae, connexae, sibique conjunctae sunt,

ut corpus, superficies, linea.

Decima tertia.

Geometria est disciplina, quae omnia continuae quantitatis genera, et proprietatis contemplatur. sive est scientia extensorum, quatenus terminata sunt.

Decima quarta

Aritmetica est disciplina in qua discretae quantitas, id est numerorum proprietates, munera, et accidentia ostenduntur.

Ars vero computandi numeros Arit=metica vulgaris, vel practica dicitur.

Decima quinta

Aritmetica speciosa, vel logistica speciosa, est disciplina illa, quae computum specierum, idest quantitatum Alphabeti litteris expressarum docet vel etiam computatio algebraica vocatur.

Decima sexta

Aritmetica universalis dicitur doctrina illa, quae utramque computandi scientiam complectitur, numericam scilicet, et speciosam, seu algebraicam.

De elementorum Aritmetica universalis liber primus.

De calculo integrorum

Definitio prima

Unitas est ea denominatio per quam quaelibet res dicitur una.

Definitio secunda

Numerus est duarum, vel plurium unitatum multitudo sive aggregatum.

Corrolarium

Ergo unitas non est numerus, sed est omnis numeri principium, atque primus numerus est duo, qui duas unitates continet, secundus est tres &c.

Definitio tertia

4 Nomina, quibus in numerando utimur sunt unum, duo, tria, quatuor, quinque, sex, septem, octo, novem, decem; nimirum ex decem unitatibus componitur una decas, duae decades dicuntur viginti, tres triginta quatuor quadraginta, quinque decades vocantur quinquaginta, sex sexaginta, septem septuaginta, octo, octaginta, novem nonaginta, decem decades, centum, seu unum centenarium componunt, decem centenaria, mille, seu unum millenarium efficiunt, ex decem centenariis millium componitur millio, ex decem centenariis, millium millionum conflatur billio, ex decem centenariis, millium

billionum efficitur trilio, ex decem centenariis millium trillionum constituitur quadrilio. Atque ita deinceps ex quadrilione componuntur quintiliones, ex quintilionibus, sextiliones.

Cum vero in numerando ad numerum denarium pervenitur, initium numerandi repetatur, sed numerus denarius simul exprimatur. Sic decem, et unum per undecim computantur: decem, et duo per duodecim. Item viginti plus septem per viginti septem; octaginta plus quatuor per octoginta quatuor.

Definitio quarta

5 Priores decem numeri inclusa unitate, numeri digiti, vel unitates vocantur. Numerus vero decem, et ejus multipli, id est viginti, triginta, quadraginta, Numeri articuli appellantur. Praeterea numeri minores numero denario dicuntur simplices, et numeri majores numero denarem compositi vocantur.

Definitio quinta

6 Notae, quibus utimur in arithmetica, ad quemlibet numerum exprimendum sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. quae significant unum, duo, tria, quatuor, quinque, sex, septem, octo, novem. Quibus notis additur Cifra. 0, quae etiam dicitur Zero, atque et

se ipsa nihil significat, sed aliis notis
ad dexteram additur (quando dicimus
ad dexteram, vel ad sinistram, semper
intelligendum est scribentis) easque decuplo
majores reddit, sive ad replendas sedes
vacuas inservit. etc..
Ut autem praedictis notis quilibet numerus
exprimatur praeter simplicem, et proprium
valorem alium in super habet ratione
loci ita, ut quaelibet nota solitaria,
vel in prima sede, idest in primo
loco posita unitates simplices denotet,
atque (a dextera semper versus sinis=
=tram scribentis procedendo) nota in
secunda sede, sive secundo loco
posita tot decades significat, quot
unitates habet, in tertia sede tot
centenaria, quot unitates continet
in quarta sede tot unitates millium
in quinta decades millium, et in
sexta millium centenaria:
Nota vero in septima sede locata
quot tot decies centena millia, sive
tot milliones significat quot unitates
habet, in octava sede, decades millio=
=num, in nona millionum centenaria,
in decima sede millionum millia,
in undecima decades millium
millionum, in duodecima tot centena
millia millionum, quot unitates
habet. Deinde eodem ordine

procedenda in aliis sex consequentibus sedibus habentur billionum unitates, decades, centenaria, millia, decades millium, et centenaria millium billionum. Deinceps sex trillionibus sedes tribuuntur, sex consequenter quadrilionibus, sex quintillionibus &c. In iis vero sedibus, quae notis carent semper scribatur cifra 0 sit exemplum.

A 134728659 Prima nota numeri A quae est novem, significat novem simplices unitates. Secunda 5 indicat quinque decades id est, 50, quinquaginta; tertia 6 valet sex centenaria, id est, 600, sexcenta, quarta 8 exprimit 8000, sive octo millia, quinta 2 significat duas decades millium, sive 20000, viginti millia, sexta 7 valet septem centenaria millium, id est 700000, septingenta millia, septima 4 indicat 4000000 id est quatuor milliones, octava 3 significat tres decades millionum id est 30000000 triginta milliones; et nona 1 valet unum centenarium millionum, id est 100000000, centum milliones, consequenter numerus A exprimit centum triginta quatuor milliones, septingenta viginti octo millia, sexcenta quinquaginta novem.

Similiter prima nota septem numeri B significat septem simplices unitates, secunda, quae est Cifra ~~zero~~ 0 indicat datum numerum B nullas habere decades, et tertia quatuor significat quatuor cente=naria, id est, 400, quadringenta; unde notae numeri B exprimunt nu=merum quadringenta septem.

Scholium.

7 Supradicta notae Aritmeticae di=cuntur etiam notae Arabicae, quia ab Arabibus vulgo inventae feruntur.

~~A 1347286 59~~

~~B 407~~

Sed a viris doctissimis inventionis gloria Indiarum habitatoribus tribuitur. Saraceni ex Arabia eas in hispaniam deportarunt, et celeberrimus vir Ger=bertus Monacus Floriacensis, qui postea fuit Pontifex Sylvestri secun=di nomine eas seculo decimo in Galliam aliasque Europae partes induxit.

Definitio sexta.

8. Numerus integer rationalis sive vulgaris est ille, qui integras unitates continet, sive qui refertur ad unitatem, tamquam totum ad partem.

9 Definito septima

Numerus fractus rationalis, seu vulgaris, qui etiam fractio vel minutia dicitur est ille, qui unam, vel plures unitatis partes continet, sive est ille, qui refertur ad unitatem, tamquam pars ad totum.

Definitio octava

10 Duobus autem numeris ad quamlibet rationem exprimendam utimur, quorum alter alteri interjecta lineola subscribitur, ut ad indicandam tertiam partem cujusvis rei scribitur $\frac{1}{3}$ et enuntiatur una tertia pars, vel triens, vel unum divisum tria. Item ad exprimendas quatuor quintas unitatis partes ponitur $\frac{4}{5}$ &c. Atque numerus infra lineolam positus indicat in quot partes unitas, seu res data divisa sit, et vocatur denominator fractionis: numerus vero supra lineolam scriptus, numerat partes, quae ex dato integro diviso, sumendae sunt, et appellatur numerator fractionis: sic in fractione $\frac{4}{5}$ denominator 5 significat datam rem divisam esse in quinque partes aequales, et numerator 4 indicat quatuor ex eisdem partibus accipiendas esse.

Definitio nona

11 Numerus, qui constat ex integro, et fracto dicitur numerus mixtus sic $7\frac{2}{3}$, qui significat septem

integram cum duabus tertiis partibus unius integri, et numerus mixtus.

Definitio decima

12 Numeri equales dicuntur illi, qui eundem numerum unitatum, vel partium unitatis continet sic duo numeri tres, et quatuor simul sumti, equales sunt numero septem. Inequales vero sunt numeri illi qui non continent eundem numerum unitatum, vel partium unitatis, quales sunt numeri sex, et octo, quorum primo deficiunt duae unitates ut adequet secundum; consequenter inequalium unus, pars alterius aequalis est, et dicitur numerus minor, alter vero cujus pars alteri toti aequalis est numerus major vocatur.

Definitio undecima.

13. Addicio est duorum, vel plurium numerorum in unam summam collectio. Sive datis duobus, aut pluribus numeris, est inventio alterius numeri qui datis simul sumtis sit aequalis. Numeri dati, dicuntur summandi et quaesitus numerus, eorundem summa, vel agregatum appellantur. Sic numerus 7 est summa numerorum 3, 4, qui a tot unitates continet quot sunt in datis numeris, 3, 4 simul sumtis.

Definitio duodecima

14 Subtractio est inventio excessus, quo numerus major minorem superat sive est inventio defectus, quo minor numerus a majore deficit.
Numerus qui subducitur, subtrahendus appellatur, alter a quo fit subtractio numerus minuendus dicitur, et numerus qui in subtractione invenitur, differentia vel residuum, vocatur. Ut est numero 9 subtrahendo numerum 5, differentia, seu residuum erit 4.

Corrolarium

15 Hinc patet differentiam additam numero subtrahendo, seu minori efficere summam æqualem numero minuendo, seu majori, ut in antecedenti exemplo summa residui 4 cum subtrahendo 5 restituit numerum minuendum 9.

Definitio decima tertia

16 Multiplicatio est inventio numeri qui toties datum numerum contineat, quot in alio etiam dato numero continentur unitates, vel unitatis partes.
Numeri dati dicuntur factores, vel multiplicatores, his vero numerus, qui ab ipsorum multiplicatione producitur factum, vel productum appellatur. Factorum ille, qui aliquoties sumitur,

multiplicandus dicitur, alter vero, qui indicat, quoties ille sumatur, multiplicator, vel multiplicans vocatur: ut multiplicando 4 per 3 productum seu factum erit 12; quia numerus duodecim toties continet multiplicandum 4, quot sunt unitates in multiplicatore tres.

Corrolarium

17 Quoniam idem productum invenitur si numerus multiplicandus toties sibi ipsi addatur, quoties unitas continetur in numero multiplicatore, ideo multiplicatio est compendiosa ejusdem numeri additio. Sic 4 plus 4 plus 4 efficiunt summam 12 equalem facto ex 4 multiplicato per 3.

Definitio decima quarta

18 Divisio est ea Arithmetices operatio in qua invenitur quoties datus numerus alium etiam datum numerum contineat; sive est inventio numeri, qui toties unitatem contineat, quoties unus datorum alterum datum numerum contineat.

Datorum primus, qui dividi debet, numerusque dividendus dicitur, alter per quem fit divisio, divisor appellatur, et ille, qui indicat quoties divisor in dividendo contineatur, quotiens, vel quotus vocatur. Ut

dividendo numerum 15 per 5, quotus erit 3, qui indicat divisorem 5, 3 vices continetur in dividendo 15; sive quotus toties continet unitatem, quoties dividendus 15 continet divisorem 5.

Definitio decima quinta

19 Numerus par est ille, qui bifariam id est per 2 dividi potest. Numeri pares sunt 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, &c.

Definitio decima sexta

20 Numerus impar est, qui unitatem differt a numero pari. Impares numeri sunt 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 &c.

Definitio decima septima

21 In Aritmetica speciosa ad quamlibet quantitatem, sive continuam, sive discretam, designandam, utimur literis Alphabeti a, b, c, d, &c.; quilibet enim numerus, sive integer sit, sive fractus, sive mixtus, apellari potest numerus a, vel numerus c, vel numerus m &c.; Idem qualibet longitudo vocari potest longitudo a, vel longitudo m &c.; Idem de alia qualibet quantitate intelligatur.

Prioribus Alphabeti literis, a, b, c &c. quantitates datæ, seu cognitæ designantur postremis vero

z, y, x, u incognitæ, et quæsitæ indicantur.

Definitio decima octava

22 Quum quælibet quantitas denominatur a, ejus duplum exprimetur per 2 a, triplum per 3 a, similiter 5 m significat quintuplum quantitatis m, et sic de cæteris. Præterea ejusdem quantitatis a dimidium ita exprimitur $\frac{1}{2}$ a, vel $\frac{a}{2}$, tertia pars per $\frac{1}{3}$a, vel per $\frac{a}{3}$ &c: Idem de reliquis quantitatibus intelligitur.

Definitio decima nona

23 Numerus litteræ immediate præfixus dicitur coeficiens ejusdem quantitatis, et denotat quantitatem illam, toties sumendam esse. Sic 4 m significat quatuor m, 3a denotat tres a, et numeri 4,3 sunt coeficientes quantitatum a, et m, et ita de reliquis.

24 Litteræ seu quantitates, quæ nullum habent numerum coeficientem semper intelligantur habere unitatem præfixam ut a idem valet hac 1a, m significat 1 m.

Definitio vigesima.

25 Quantitates aliæ sunt positivæ seu affirmativæ, aliæ vero negativæ, seu privativæ dicuntur. Sic argentum quod possidemus dicitur quantitas positiva, sed æs alienum, negativa

quantitas apellatur. Quantitates affirmativæ nihilo majores vocantur, et negativæ nihilo minores. Etenim Zero, seu nihilum quantitatibus additum eas nec auget, nec minuit. Quidquid ergo alicujus quantitatis valorem augere potest, dicendum est nihilo majus. Quod vero quantitatem minuit, nihilo minus dicitur. Quoniam vero quantitas positiva alteri addita ejus valorem auget, et vicissim negativa minuit; idcirco quan=titas affirmativa nihilo major erit et negativa nihilo minor. Cæterum quan=titates dicuntur positivæ, vel negativæ in ordine ad alias, quas augent vel minuunt, non autem in se spectatæ; quia omnis quantitas in se spectata positiva est, seu nihilo major.

Definitio Vigesima prima

26 Quantitates homogeneæ, seu ejusdem generis dicuntur illæ, quarum una aliquoties sumta, alteram superare potest, seu quarum una ab altera, vel semel, vel aliquoties subtracta, vel nihil, vel se minus relinquit; conse=quenter vel æquales sunt inter se vel inæquales. Sic longitudo A et longitudo B sunt quantitates homoge=neæ, quia longitudo minor B bis sumta excedit longitudinem A.

A——

B—

Etherogenea vero seu diversi generis sunt quantitates illæ, quarum una aliquoties sumta alteram superare nequit, ut numerus, et longitudo.

Definitio vigesima seconda

27 Æqualia dicuntur, quorum unum alteri salva quantitate substitui potest, sive quantitates æquales dicuntur illæ, quæ habent eundem valorem, vel eandem extensionem. Ut si a significet duas argenteas libras, et m significet solidos quadraginta, tunc erit valor quantitatis a æqualis valori quantitatis m, sive erit a æqualis m quia duæ argenteæ libræ equivalent solidis quadraginta. Inæqualia vero sunt, quorum unum parti alterius æquale est.

Definitio vigesima tertia

28 Signa operationem Aritmeticas universalis sunt $+$, $-$, $\times$, $=$ $>$ $<$

29 Signo $+$ idest plus utitur ad designandas quantitates positivas, et est signum additionis, ut $5+2$, sive quinque plus duo significat septem, hoc est summam numerorum 5, et 2. Item $a+b$, sive a plus b valet summam quantitatum a, et b

30 Signum $-$, idest minus est

signum subtractionis, eoque utimur
ad indicandas quantitates negativas
sic $6-2$ sive sex minus duo signi=
=ficat residuum, quod oritur subtra=
=endo duo, ex sex, hoc est 4. Simi=
=liter $a-c$ sive a minus 6. simi=
liter a ~~minus~~ c, sive a minus c signi=
ficat residuum, quod oritur subducendo
quantitate c ex quantitate a. Ex:
gr: sit a sit ~~8~~ 6, et c sit 3 tunc
$a-c$ valebit $6-3$ idest 3.

31 Signum multiplicationis est $\times$ quod
dicitur multiplicatum ita ut 3×4,
idest 3×4 indicat productum ex 3 in
4 scilicet 12. Item $a\times b$ significat
productum, quod fit multiplicando a per
b. Si a sit 2, et b sit 9 tunc $a\times b$
~~multiplicato b~~ valebit 2×9 idest 18.

32 Aequalitatis signum est $=$ scilicet
aequale, eoque utimur ad comparandas
quantitates inter se aequales. Sic $3+2$
$=5$ indicat summam numerorum
~~tres~~ et duo aequalem esse numero quinque.
Item $a=b$, a aequalis b, signi=
=ficat quantitates a, et b aequales esse;
et $c=4$ indicat valorem quantitatis
c esse 4.

33 Duobus autem signis $>$ idest
majus, et $<$ hoc est minus utimur
ad designandas quantitates inaequales.
Sic octo $<$ 5 ~~[illegible]~~, sive octo major quinque

indicat numerum octo majorem esse numero quinque. Item $a > c$ seu a major c significat valorem quantitatis a majorem esse valore quantitatis c, vicissim $5 < 8$ sive quinque minor octo, significat numerum quinque minorem esse numero octo. Similiter $c < a$ idest c minor a indicat c minorem esse quantitate a.

34 Divisio quantitatum exprimitur ut numerus fractus (10) ponendo divisorem infra dividendum interjecta lineola; sic $\frac{12}{4}$ quod legitur duodecim divisum quatuor, indicat quotientem 3 qui oritur dividendo numerum duodecim per numerum quatuor; etenim duodecim quartæ partes, tria integra efficiunt. Item $\frac{a}{b}$ hoc est a divisum b denotat quotientem, qui oritur dividendo a per b. ut si a sit quindecim, et b sit 3, tunc $\frac{a}{b}$ valebit $\frac{15}{3}$, scilicet 5.

Scholium

35 Signa +, et — contraria sunt quia signo + quantitates positivæ, et signo — negativæ designantur. Quantitates illæ solitariæ, vel initiales quæ nullum habent signum præfixum semper intelliguntur habere signum +: sic a idem est hac + a m valet + m; a + b — c.

valet + a + b − c Quanti=
=tatibus vero negativis, semper præ=
=figitur signum −

Definitio vigesima quarta

36 Quantitates, quæ signis +, et −
non sunt connexæ, dicuntur simplices,
vel monomiæ, vel incomplexæ, ut a,
vel − c, vel a m, vel $\frac{a}{c}$ &c:.
Quantitates vero, quæ signis +,
et − sunt connexæ, compositæ
apellantur, vel polynomiæ, vel com=
=plexæ, ut a + c, vel a − b +
m &c:, atque quantitates illæ, quæ
duobus terminis constant, binomiæ
vocantur, ut binomium a + c, vel
binomium b − m, vel 5 + 3 &c: si
a tribus terminis constituuntur, tri=
=nomiæ dicuntur, si a quatuor quadri=
=nomiæ apellantur, et ita deinceps.
Sic a + b + c, vel a − b + c
est trinomium, et b − a + c + m
est quadrinomium.

Problema primum

37 Datum quemlibet numerum, arit=
=meticis notis descriptum, enuntiare.

Resolutio.

Primo a dextera procedendo versus
sinistram per virgulas dividatur in
periodos, seu membra, tres notas, unicuiq
membro assignando.
Secundo si datus numerus plures quam

sex constat notis supra septimam privatur 1 intermissisque sinistrorsum, quinque notis supra notam decimam tertiam ponatur 2, atque ita pro-
gredienDo intermissis semper quinque notis scribantur numeri 3, 4, 5 ecc supra notas decimo nono, vigesimo quinto, trigesimo primo loco positas ecc.
Atque datus numerus divisus erit in senarios, sive in membra, quorum unum quodvis sex continebit notas, excepto primo ad sinistram posito, quod paucioribus, et aliquando unica nota constare potest.
Praeterea quilibet senarius per virgu-
lam inter duo ternaria dividatur, quorum primum dextrorsum semper continebit unitates, decades, et centenaria, ejusdem senarii, alter vero ternarius sinistrorsum continebit millia, seu unitates millium, decades millium et centenaria millium dati senarii.
Insuper, ut evidens est ex dictis in definitione quinta (6)
Primus senarius est unitatum, secundus continet milliones, tertius milliones millionum, seu billiones, quartus senarius continet trilliones, quintus quadrilliones, atque ita deinceps.
Denique enunciatur numerus incipiendo a sinistra, et versus

dextram progrediendo, atque virgulae appositae millia significant, et prolata nota supra quam posita fuit unitas pronuntietur voce millia, ubi posita fuit nota 2 pronuntietur billio, et sic deinceps, quae omnia sequentibus exemplis illustrata facilius percipi=entur: addes enim, ut inquit clari=ssimus eques Neutonus, exemplis facilius, quam praeceptis addiscuntur.

8,035 ------ A

43,726 - B

530,109 C

4327,540289,605 D

Dati sint numeri A B C D, qui divi=dantur in membra, ut antea dixi=mus, deinde numerus A ita enunciatur octo millia, triginta quinque.
Numerus B valet quadraginta tria millia, septingenta viginti sex.
Numerus C legitur, quingenta triginta millia centum novem.
Et numerus D enuntiatur quatuor milliones per centa viginti septem millia, quingenta quadraginta milliones, ducenta octoginta novem millia sexcenta quinque.

Problema secundum

38 Numeros integros in unam summam colligere.

+8,035 A +
+43,726 B
+530,109 C
+4327,540289,605 D

Resolutio

Primo dati numeri ordinatim scribantur, alius nempe infra alium, ita ut unitates unius

sint sub unitatibus alterius, decades sub decadibus, centenaria sub centenariis, et millia millibus sibi invicem respondeant &c.
Secundo infra eosdem numeros ducatur lineolam.
Tertio dextrorsum incipiendo, in unam summam colligantur simplices unitates, scilicet notae illae, quae sunt in prima columna ad dexteram scribentis posita, atque sic ipsarum summa non excedit numerum novem, tota infra lineam et in eadem sede, idest sub eadem columna scribatur. Eadem operatio deinceps fiat in secunda columna, in tertia, in quarta &c.
Et habebitur infra lineam quaesita summa. Sic numerorum 123, 231, 542, summa erit 896, hoc est octingenta nonaginta sex, quia unitates 2 plus 1, plus 3 dant 6, decades 4 plus 3, plus 2 faciunt 9 et centenaria 5, plus 2, plus 1 dant centenaria 8.
Quarto si autem cujuslibet columnae summa, numerum novem excedit, atque una vel plures decades continet, tunc infra lineam, et sub eadem columna scribatur tantum id quod remanet supra decades vel ponatur cifra 0, sic integras decades

123
231
542
896

5146
4375
7624
238
17383

summa contineat, deinde sequentis columnæ notæ tot addantur unitates, quot fuerint decades in præcedenti columna inventæ. Sit exemplum.

In unam summam colligendi sint numeri 5146, 4375, 7624, 238, qui ordinatim scribantur, ut supra dictum fuit; atque subducta linea in unam summam redigantur notæ primæ columnæ, scilicet unitates 8, 4, 5, 6, quæ simul junctæ dant summam 23; nam 8 plus 4 faciunt 12, et 12 plus 5 dant 17, et 17 plus 6, efficiunt 23, quæ summa 23 continet tres simplices unitates, et duas decades, ideoque scribatur nota 3 sub columna unitatum, et decades 2 cum aliis decadibus 3, 2, 7, 4 colligantur, et decadum summa erit 2 + 3 + 2 + 7 + 4, idest 18; decem vero decades unum centenarium efficiunt, ergo inventæ summæ 18 scribatur 8 (idest octo simplices decades) infra lineam in decadum sede, et 1, scilicet una decas decadum, seu unum centenarium, aliis centenariis 2, 6, 3, 1, adjungatur et erit 1 + 2 + 6 + 3 + 1, idest 13 centenariorum summa; quoniam vero decem centenaria, unum millenarium constituunt, ideo inventæ summæ 13, scribatur nota 3 in tertia columna et infra lineam, atque 1, idest unum

unum mille aliis millibus, 7, 4, 5,
adjungatur, erit 1 + 7 + 4 + 5,
hoc est 17, millium summa ponatur itaque
7 sub quarta columna, in millium
sede, et 1, una nempe decas millium
scribatur ad sinistram ejusdem 7, in
quinta sede, quae ea est sedes decadum
millium, atque datorum numerorum
summa erit 17383, hoc est septende:
cim millia, trecenta octoginta tria, eadem
ratione numerorum 32050, 6040, 2070,
40, summa erit 40200, idest quadraginta
millia ducenta.

32050
6040
2070
40
40200

Demonstratio

39 Additio, per definitionem undecimam
(13) est inventio numeri hujus partes,
seu unitates, adaequent datorum nume:
:rorum, partes omnes simul sumtas.
atqui ex constructione in primo exemplo
numerus 896, tot continet unitates,
decades, et centenaria, quot sunt unitates,
decades, et centenaria in datis numeris
123, 231, 542, simul sumtis, ergo
numerus 896, est summa, seu agre:
:gatum eorundem numerorum,
Quod erat propositum.
Eadem ratione demonstratur, reliquas
summas rite factas esse.

Scholium

40 Additionis examen fit, eandem
additionem repetendo, sed ordine

inverso, ut si prius ab imo sursum processeris, deinde a summo deorsum descendas, et si eadem fuerit summa utroque modo inventa, nullum errorem inrepsisse, probabile erit.

Problema tertium

41 Numerum integrum ex alio integro majore subtrahere.

Resolutio

Primo numerus minor infra majorem a quo subducendus est, ordinate scribatur ita ut unitates sint sub unitatibus, decades sub decadibus; atque infra eosdem numeros ducatur lineola.

Secundo dextrorsum incipiendo subtrahantur unitates numeri subtrahendi ab unitatibus numeri minuendi, decades ex decadibus centena ex centenis ~~&c~~, et id quod remanet in quavis sede, scribatur infra lineam in eadem sede.

Cum vero inferior nota superiori est aequalis, tunc ponatur Cifra 0 infra lineam, et in eadem sede. Ut subtrahendo numerum 86524, ex numero 137596, residuum erit 51072, nam subducendo unitates 4 ex unitatibus 6 remanent 2; subtrahendo decades duas, ex 9 remanent 7, deinde centenaria 5 ex centenariis 5 reliquum est 0. Postea millia ~~ex~~ 6, ex 7 residuum est 1. Tandem quia 8. decades millium ex 3 decadibus millium

137596
86524
51072

subtrahi nequeunt, subtrahatur 8 ex 13, et residuum erit 5.

Tertio cum numerus major, seu minuendus habet notas, quibus aut nullæ numeri subtrahendi respondent notæ, aut respondet cifra 0, tunc illæ notæ etiam infra lineam, in propriis sedibus scribantur. Ut ex numero 303~~5~~5876 0 subtrahendo numerum 18040, residuum erit 3040720.

3058760
18040
3040720

Quarto tandem si aliqua nota inferioris numeri subduci nequit ex respondenti nota numeri majoris, quia illa major est, tum superiori notæ addita intelligatur una decas, et subducta inferiori nota, ponatur residuum infra lineam, deinde, vel sequens nota superioris numeri ad sinistram posita, unitate minuitur, vel (quod idem est) nota subsequens numeri inferioris, unitate augetur. sit exemplum.

Ex numero 436052 subtrahendus sit numerus 352064, posito numero subtrahendo ordinatim infra minuendum atque ducta lineola, subtrahatur 4 ex 2, quod fieri nequit, proindeque ipsi 2 adjuncta intelligatur una decas, fiet 12, ex quo subtracto 4. Residuum est 8, quod scribatur infra lineam. Deinde subsequens nota inferioris 6,

436052
352064
83988

unitate augeatur, fiet 7, quae subduci nequit ex nota superiore 5, ideoque ipsi 5 adjuncta intelligatur unadecas habebitur 15, ex quo demto numero 7, residuum erit 8, quod infra lineam ponatur (vel subsequens nota superior 5 unitate minuatur, remanebit 4, ex quo subtrahi nequit inferior nota 6 unde eidem numero 4 adjungatur una decas fiet 14, ex quo subducto numero 6, invenitur idem residuum 8). Postea subsequenti inferiori notae 0 addatur 1, fiet 1, et subtrahatur 1 ex superiore nota 0, quod fieri nequit, ideoque ipsi 0 addatur una decas, et habebitur 10, ex quo subducatur 1, et reliquum 9 ponatur infra lineam. Deinde addatur 1 subsequenti inferiori notae 2, fiet 3, quae subducta ex nota 6, remanebit numerus 3, qui scribatur infra lineam in eadem sede. Postea subtraho 5 ex tredecim (quia 5 ex 3 subduci nequit), et residuum 8, infra lineam pono, atque transfero 1 addendum inferiori numero 3 fiet 4, quo subducto ex superiore 4, nihil remanet, et ponenda esset cifra 0 infra lineam, sed inutile est eam in finem operationis scribere itaque residuum erit 63988. Similiter subducendo numerum B ex

A	7104008
B	962015
C	6141993

numero A, residuum est C; nam ablato 5 ex 8, residuum est 3 infra lineam scribendum: 1 ex 10 reliquum est 9; atque iterum 1 ex 10 residuum est 9. 3 ex 4 residuum est 1. Tum ab 6 ex 10, reliquum est 4. Deinde 10 ex 11 residuum est 1. Tandem 1 ex 7 reliquum est 6.

Demonstratio

In omni subtractione (15) differentia addita numero subtrahendo efficit summam equalem numero minuendo atqui quin praecedenti exemplo, summa residui, vel differentiae C, cum subtrahendo B restituit numerum minuendum A ergo numerus C est differentia inter numeros A et B. Idem de reliquis exemplis demonstratur, quod erat propositum

Corrolarium

8 Hinc subtractionis examen fieri debet in colligendo in unam summam residuum inventum cum numero subtracto, atque si eorundem summa aequalis fuerit numero minuendo nullum irrepsisse errorem pro certo habeas.

14 Problema quartum

Numerum integrum per alium integrum numerum multiplicare

Resolutio

Numerorum simplicium (5) → Multiplicatio, quae in sequenti tabella refertur, memoriae mandetur.

1 in 1 facit 1

1	2	2
2	2	4
2	3	6
2	4	8
2	5	10
2	6	12
2	7	14
2	8	16
2	9	18
3	3	9
3	4	12
3	5	15
3	6	18
3	7	21
3	8	24
3	9	27
4	4	16
4	5	20
4	6	24
4	7	28
4	8	32
4	9	36.
5	5	25.
5	6	30
5	7	35
5	8	40
5	9	45
6	6	36
6	7	42
6	8	48
6	9	54
7	7	49
7	8	56
7	9	63.
8	8	64
8	9	72
9	9	81.

Quum vero numeri inter se multiplicandi sunt ambo compositi (5) vel unus est compositus, et alter simplex, tunc.

Primo scribatur numerus multiplicator infra numerum multiplicandum (16) ita ut unitates sint sub unitatibus, decades sub decadibus, centenaria centenariis respondeant, deinde infra eosdem numeros ducatur lineola.

Secundo quando multiplicator est numerus simplex, tunc in singulas multiplicandi notas multiplicetur, a dextera incipiendo et versus sinistram procedendo: atque cum productum quodlibet peculiare

non excedit numerum novem, totum ponatur infra lineam; tum vero excedit numerum novem, et unam vel plures decades continet, tunc infra lineam scribitur tantum id quod remanet supra decades, vel ponitur cifra 0, si productum nihil praeter integras decades continet, et tot reservantur uni:tates sequenti producto adjungendae, quot decades continet productum illud.

Sit exemplum primum

Numerus multiplicandus sit 18321, et multiplicator sit 7, quem scribo sub unitate multiplicandi, et subducta lineola multiplico 7 in 1, sed unitas septies sumta dat septem scribo itaque 7 infra lineam in prima sede. Deinde 7 multiplicatum in 2 facit 14, cujus producti scribo notam 4 sub lineola, et in secunda sedes aeque 1 idest unam decadem, reservo sequenti producto adjun:gendam. Tum 7 in 5 producit 35, cui adjungo 1 reservatum ex antece:denti producto, et fit 36, scribo 6 infra lineam in tertia sede, et retineo 3, tres nempe centenariorum decades, sive tria millia sequenti producto adjungenda. Postea 7 in 8 facit 56, cui addo 3 retenta ~~retenta~~ ex praecedenti producto, et fit 59; pono 9 sub lineola in quarta sede, et reservo 5 in 5.

18321
7
12 ~~8~~ 9647

Demum 7 in 1 dat 7, cui addo 5
servatum ex praecedenti producto, et fit 12,
quem totum infra lineam pono in
sedibus quinta et sexta: atque productum
seu factum hujus multiplicationis erit
129647 idest centum viginti novem
millia, sexcenta quadraginta septem
Tertio cum vero multiplicator est etiam
numerus compositus, tunc singulae ejus
notae separatim multiplicentur in singulas
numeri multiplicandi notas, sed producta ea
ratione infra lineam describantur, ut
(invento producto ex prima nota multi-
plicatoris in ~~primam~~ totum numerum multiplicandum)
primum productum ex secunda nota
multiplicatoris in primam multiplicandi,
scribatur in secunda sede, scilicet directe
sub ipsa secunda nota: reliqua vero
producta ex eadem nota in reliquas
notas multiplicandi, sinistrorsum ordi-
natim scribantur. Similiter primum
productum ex tertia multiplicatoris nota
in primam multiplicandi notam, directe
sub ipsa tertia nota scribatur, idest
in sede centenariorum, atque ita
deinceps, ut videre est in sequentibus
exemplis.
Quarto ducatur linea sub inventis
peculiaribus productis, quae in unam
summam colligantur, atque eadem
summa erit quaesitum productum.

Exemplum secundum

Sit multiplicandus 3624, et multiplicator sit 23, qui ordinatim scribantur ut antea diximus, atque sub ducta lineola dico 3 in 4 producit 12, scribo 2 infra lineam in prima sede, et retineo 1 sequenti producto, deinde 3 in 2 dat 6, cui addo 1 ex antecedenti producto reservatum, et fit 7, pono 7 infra lineam in secunda sede. Postea 3 in 6 dat 18 scribo 8 in tertia sede, et servo 1 sequenti producto adjungendum. Tandem 3 in 3 facit 9 cui addo 1 retentum, et fit 10, quem totum infra lineam pono, ita ut 0 sit in quarta sede, et 1 in quinta, atque completum erit productum ex prima nota 3 multiplicatoris in integrum numerum multiplicandum.

Deinceps multiplicatur numerus 3624 per secundam notam 2 multiplicatoris 13, atque primum productum ex 2 in 4 scilicet 8 scribatur infra lineam directe sub ipso multiplicatore 2 in decadum sede hoc est infra secundam notam 2 jam inventi producti. Nam multiplicator 2 non significat duas unitates, sed duas decades, seu viginti unitates, quia positus est in secunda sede proindeque superior unitatum nota 4, non bis sed vicies sumenda est, et numerus 4 viginti vices sumtus

	3624
	23
	~~10872~~
	10872
	7248
	83352

	3624
	23
	10872
	7248
	83352

producit 80, idest octo decades, ideoque in hoc casu productum ex 2 in 4, quod est 8 ponendum est secunda sede, in qua octo decades, seu octoginta unitates significabit. Postea ducatur 2 in 2 et productum quatuor infra lineam in tertia sede ponatur. Deinde 2 in 6 dat 12 scribatur 2 sub linea in quarta sede, hoc est ad sinistram praecedentis notae 4, et 1 servetur adjungendum sequenti producto ex 2 in 3, quod est 6, cui addatur 1 ante retentum fiet 7, atque ponatur 7 in quinta sede, ad sinistram nempe antecedentis notae 2. Tandem ducta lineola sub inventis productis in unam summam colligantur singula particularia producta (38) quae summa erit 83352; consequenter productum ex numero 23 in numerum 3624 erit 83352.

Exemplum tertium

Similiter multiplicando numerum 46080 per 5030 oritur productum 231782400. Nam totus numerus superior multiplicatus per 0 dat productum 0 atque scribo 0 infra lineam in prima sede. Deinde multiplicando per secundam notam 3 multiplicatoris dico 3 in 0 facit 0, quam cifram pono in

secunda sede. Postea 3 in 8 dat 24, scribo 4 in tertia sede, et retineo 2 adjungenda sequenti producto ex 3 in 0, quod est etiam 0, cui addo 2 retenta, et fit 2, scribo igitur 2 in quarta sede; atque multiplico 3 in 6, et producti 18, pono 8 in quinta sede, et retineo 1 sequenti producto adjungendum. Tum duco 3 in 4, et producto 12 adjungo 1 antea retentum fit 13, pono 3 in sexta sede, et 1 in septima.
Tertio loco multiplico totum numerum multiplicandum per tertiam notam multiplicatoris, quae est 0, et scribo productum 0 infra lineam in tertia sede, hoc est sub nota 4 praecedentis producti. Tandem multiplico per quartam figuram 5; et 5 in 0 producit 0 ideoque pono 0 in quarta sede directe sub multiplicatore 5, idest ad sinistram praecedentis 0. Deinde 5 in 8 dat 40, pono 0 in quinta sede et reservo 4. Postea 5 in 0 facit 0, cui adjungo 4, et pono summam 4 in sexta sede. 5 in 6 dant 30, scribo 0 in septima sede, et reservo 3 adjungenda producto ex 5 in 4, quod est 20, cui addo tria retenta, summa erit 23, pono 3 in octava sede, et 2 in nona.

3542
346
21252
14168
1.0626
1.225532

Tandem subtrahat lineam, et in unum collectis peculiaribus inventis productis habebitur quaesitum productum 23178-2400.

Exemplum quartum

Item multiplicando numerum 3542 per numerum 346 invenietur productum 1225532.

45 Demonstratio.

In omni numerorum exercitatione productum toties continere debet numerum multiplicandum, quot unitates, vel unitatis partes continentur in multiplicatore. Sed in primo antecedenti exemplo est constructione productum 129647 toties continet multiplicandum 18521 quot unitates reperiuntur in numero multiplicatore 7. Si enim numerus multiplicandus septem vices, ordinate scribatur (386) et ducta linea fiat additio summa dabit eundem numerum 129647. ergo hic numerus est productum ex numero 7, in numerum 18521 cum multiplicatio (14), sit compendiosa ejusdem numeri additio. Idem de qualibet alia multiplicatione intelligatur. Quod erat propositum.

Scholium

46 Multiplicationis examen obtinetur dividendo productum per 1. ex factoribus, atque si pro quotiente alter factor

inveniatur, certum erit multiplicationem rite factam fuisse: at prius intelligendum est, qua ratione divisio perficiatur, ideo sit

Problema quintum

47 Numerum integrum per alium integrum numerum dividere

Resolutio.

Primo simplicium numerorum multiplicationem superius (44) traditam in memoria habere necesse est; Qui enim expli caussa, jam didicit productum ex 7 in 9 esse 63, facillime intelliget numerum 63 novies continere numerum 7 et septies numerum 9.

Secundo cum divisor est numerus simplex, et dividendus duabus, vel pluribus constat notis, tunc scribatur in primis numerus dividendus, et juxta eundem relicto dextrorsum aliquo intervallo, ducatur lineola a summo deorsum, et prope eandem lineam versum dexteram scribatur divisor sub quo ducatur lineola transversa a sinistra dextrorsum.

Deinde, sinistrorsum incipiendo singulæ numeri dividendi notæ per datum divisorem dividantur, et ponantur peculiares quotientes sub linea infra divisorem ducta, ut videre est in sequentibus exemplis.

64820 | 2 (A, B, C)
32410

+ 1380 | 4
12 — 345
18
16
20
20
0

Exemplum primum

Sit numerus dividendus 64820, et divisor sit 2, scribatur primo numerus dividendus, atque dextrorsum ducatur, a summo deorsum lineola AB; postea scribatur divisor 2, et infra divisorem ducatur lineola transversa BC. Deinde sinistrorsum incipiendo, dico 2 in 6 ter continetur (, quia 2 in 3 dat 6); scribo itaque primam quotientis notam 3 sub linea BC, infra divisorem. Item 2 in 4 bis continetur pono 2 ad dexteram notæ jam inventæ 3. Postea dividendo 8 per 2 invenio quotientem 4 quem scribo sub divisore post alias duas notas jam inventas. Quum 2 in 2 semel continetur, atque pono 1 pro quarta quotientis nota. Tandem 2 in 0 non continetur, ideoque scribo 0 pro quinta quotientis nota, et perfecta erit divisio. Itaque dividendo numerum 64820 per 2, quotiens erit 32410.

Exemplum secundum

Numerus dividendus sit 1380, et divisor sit 4, qui scribantur, ut in antecedenti exemplo. Deinde quum divisor 4 in prima dividendi nota 1 non contineatur, sumantur duæ primæ notæ; dividatur nempe 3 per 4, sed 4 in 13 tres vices tantum continetur; ergo sub divisore, et infra lineam

1380 | 4
12 — 345
18
16
20
20
0

transversam ponatur nota numerus 3 qui multiplicetur per divisorem 4, erit productum 12 sub membro diviso 13 scribatur, et inferius ducta parva lineola, subtrahatur 12 ex 13, et ad dexteram residui 1, descendatur tertia nota 8 numeri dividendi erit 18 secundum membrum dividendum, in quo divisor 4 non continetur quinquies (quia 4 in 5 producit numerum 20 majorem numero 18), sed tantum quater continetur, ideoque ponatur 4 post notam 3 in quotiente, deinde multiplicetur 4 in divisorem 4, et productum ~~erit~~ 16, scribatur sub membro diviso 18 ex quo subtrahatur et residuo 2 dextrorsus adjungatur ultima dividendi figura 0, erit 20, tertium membrum dividendum in quo divisor 4 quinquies continetur; scribatur itaque 5 pro tertia quaesiti quotientis nota, atque ducto 5 in 4 productum 20 subducatur ex membro diviso 20, nihil remanebit, et completa erit divisio; consequenter hujus divisionis quotiens erit 345.

Tertio si in progressu operationis inveniatur membrum dividendum quod sit minus divisore, tum in quotiente ponatur cifra 0, et alia numeri dividendi nota descendatur quod si adjuncta alia dividendi nota

divisum nondum continetur in eo membro dividendo, tunc alia cifra o in quotiente ponatur, et alia descendatur dividendi nota, atque hac operatio toties iteretur, donec membrum dividendum contineat divisorem vel nullae in dividendo supersint notae, ut videre est in sequenti exemplo. Exemplum tertium.

801600	8
8	100200
0016	
16	
000	

Divisor 8 in prima figura 8 numeri dividendi 801600, semel continetur; proindeque prima quotientis nota erit 1, quae multiplicatur in divisorem 8, et productum 8 scribatur sub nota 8 numeri dividendi, ex quo subducatur, residuum erit 0, cui dextrorsum descendatur secunda dividendi figura, quae est 0, et erit 00, membrum dividendum, in quo divisor 8 non continetur, ideoque ponatur 0 in quotiente, et membro 00 dextrorsum addatur tertia dividendi nota 1; fiet membrum dividendum 001, hoc est 1, quod divisorem 8 non continet, consequenter ponatur alia cifra 0 in quotiente, et membro 001, dextrorsum addatur quarta dividendi nota 6, fiet 0016, id est 16 membrum dividendum, in quo divisor 8 bis continetur; scribatur itaque 2 pro quarta quotientis nota, et productum 16 ex 2 in 8, subducatur ex membro

diviso 16, residuum erit 0, cui dextrorsum
addatur quinta dividendi figura 0
fiet 00, in quo divisor non continetur,
ergo ponatur 0 in quotiente et descen=
=datur ultima dividendi figura 0
Cumque divisor 16 in membro dividendo
00, idest 0 non contineatur, scribetur
alia cifra 0 pro sexta quotientis
nota, et hujus divisionis quotiens erit
100100.

Quarto quando divisor est etiam numerus
compositus, tunc secernantur ex dividendo
tot notae sinistrorsum quot sunt in divi=
=sore, et si numerum efficiant mi=
=norem divisore, illis una etiam
apponatur, atque puncto ab aliis
secernatur, postea divisio perficiatur,
ut in exemplis sequentibus.

Sit divisor 24, et dividendus sit
6816, qui scribantur ut diximus
antea. Postea puncto secernatur
68 ex dividendo, et quaeratur quoties
divisor 24, continetur in membro
dividendo 68, quod sequenti ratio=
=cinio facillime invenietur. Prima
divisoris nota 2 in prima dividendi
membri nota 6 ter continetur, sed
secunda divisoris nota 4 in
secunda dividendi membri nota 8
non continetur ter. Perindeque
68 non continet tres vices divisorem

```
68.16 |24
48.    284
---     24
201    1136
192    568
---    6816
  96
  96
   0
```

24, unde in hoc casu 2 in 6 continetur
tantum bis et remanent 2 quae una cum
sequenti nota 8 faciant 28, in
quo altera divisoris nota 4 etiam bis
continetur (nihil autem refert si pluries
contineatur) ideoque 24 in 68 bis
continetur; scribatur itaque 2 pro
prima quotientis nota sub divisore
in practicam, et per inventum 2
multiplicetur divisor, et productum 48
ponitur sub membro diviso 68, hac
ratione nimirum multiplico 2 in 4
et scribo productum 8 sub nota 8
numeri 68. Deinde multiplico 2
in 2, et pono productum 4 sub nota 6
ejusdem membri 68, residuum erit 20
cui divisorum addatur tertia dividendi
nota 1 fiet membrum dividendum 201,
quod divido per 24 dico nempe 2 in 20
novies continetur (nullus enim numerus
ponitur in quociente major numero
novem) et remanent 2, quae una cum
sequenti nota 1 faciunt 21, sed 4 in
21 non continetur novies, consequenter
in hoc casu 2 in 20 novies contineri
nequit, unde 2 in 20 contineatur octies
remanebunt 4 (quia 2 multiplicatum
per 8 dat 16, quae cum sequenti nota
1 efficiunt 41, in quo alia divisoris
nota 4, etiam octo vices continetur (
nihil refert quod pluries contineatur) i

ergo divisor 24 in membro dividendo
201 octo vices continetur, scribo
igitur 8 pro secunda quotientis nota,
et multiplica 8 in divisorem 24,
atque scribo productum 192 infra
201, et ducta lineola subtraho 192
ex 201, atque posito residuo 9 infra
lineam, dextrorsum addo quartam dividendi
notam 6, et divido 96 per 24, dico
semper 2 in 9 quater continetur et
remanet 1, quod cum sequenti nota 6
facit 16, in quo divisoris nota
etiam quater continetur, consequenter
divisor 24 in membro 96 quater
continetur, ideoque pono 4 pro tertia
quotientis nota, atque multiplicando 4
in 24, et subtrahendo productum 96
ex membro mox diviso 96, nihil
remanet ergo quotiens quaesitus est
284.

Quinto quando absoluta divisione
aliquid remanet, tunc residuum illud
scribatur ad modum fractionis (10), idest
post quotientem inventum supra lineolam
infra quam ponatur totus divisor; atque
hinc oriuntur fractiones, de quibus
in secundo libro pertractabimus

Exemplum quintum.

Sit numerus dividendus 187695, et
divisor sit 257, qui scribantur ut
in primo exemplo. Deinde quia

187695 | 257
1799 | $730\frac{85}{257}$
———
779
771
———
85

tres primae dividendi notae continent
numerum 187, minorem divisore 257
ideo sumantur quatuor notae, et ha-
bebitur 1876, primum membrum
dividendum, in quo divisor 257
septies continetur; nam prima divisoris
nota 2 in 18 novem vices continetur
et nihil remanet, sed secunda divisoris
nota 5 non continetur novies in tertia
membri dividendi nota septies, ideoque
divisor 257, non continetur novem vices
in numero 1876; proindeque quotiente
unitate minuto, et dico 2 in 18
octo vices continetur, et remanent 2 quae
cum sequenti nota 7, efficiunt 27; sed
secunda divisoris nota 5 octies contineri
nequit in 27; ergo neque toties divisor
257 octies contineri potest in membro 1876.
consequenter iterum unitate minuo quotientem, et
dico 2 in 18 continetur septem vices, et
et remanent 4, quae cum sequenti nota 7
faciunt 47, in quo secunda divisoris
nota 5 etiam septem vices continetur
et remanent 12, quae una cum ultima
membri dividendi nota 6, faciunt 126, in
quo numero tertia divisoris nota 7, etiam
septies continetur, scribo igitur 7 in quotiente
et per eandem notam 7 multiplico totum
divisorem 257, atque pono productum 1799,
ordinatim infra membrum 1876, atque
subducta lineola subtraho 1799, et 1876,
et residuo 77, infra lineam posito dexterius

adde sequentem dividendi notam 9, et fit 779 in qua divisor 257 ter continetur, quia 2 in 7 ter continetur, et remanet 1 quod consequenti notam facit 17, in quo secunda nota 5 divisoris, etiam ter continetur, et remanent 2, quae cum sequenti nota 9 faciunt 29, in quo tertia divisoris nota 7 etiam ter continetur: pono igitur 3. pro secunda quotientis nota et eandem multiplico in divisorem 257, et subtraho productum 771, ex membro mox diviso 779, atque residuo 8 dextrorsum adjungo ultimam dividendi notam 5 erit 85, ultimum membrum dividendum in quo divisor 257 non continetur, unde pono 0 pro ultima quotientis figura, atque quaesitus quotiens erit 730 una cum residuo 85, quod scribetur prope quotientem supra parvam lineolam infra quam ponatur divisor 257, ideoque integer quotiens erit (11) numerus mixtus $730\frac{85}{257}$ hoc est septingenta triginta integra, et octoginta quinque ducentesimas quinquagesimas septimas partes unius integri continebit.

Sexto tandem cum integer divisor major est integro numero dividendo, tunc quotiens obtinetur per fractionem (10, 11) hujus numerator sit numerus dividendus, et denominator sit divisor. Sic dividendam numero 3 per divisorem

4 quotiens erit $\frac{3}{4}$. Item dividendum numerum 14 per numerum 35, quotiens erit $\frac{14}{35}$, et sic de caeteris

Demonstratio

48 Cujuscumque divisionis quotiens (18) indicare debet quot vices divisor continetur in dividendo, sed ex. caus. in quarto hujus problematis exemplo, numerus 284 indicat quoties divisor 24 continetur in dividendo 6816; si enim numerus 24 ducentas octoginta quatuor vices sumatur, hoc est, si multiplicetur per 284, productum restituet numerum dividendum 6816, ergo numerus 284 est ejusdem divisionis quotiens. Item de aliis exemplis intelligatur quod erat propositum

Corrolarium

49 Hinc divisionis examen fieri debet multiplicando divisorem per inventum quotientem, atque si erratum non sit, numerus dividendus restituitur: sic multiplicando quotientem 284 per divisorem 24 productum erit 6816, idem numerus dividendus.

Praeterea si quid ex divisione remansit producto ex quotiente in divisorem adjungatur: sic ad examen exempli quinti multiplicetur 257 per 730, et producto 187610 adjungatur residuum 85, summa 187695 restituet

numerum dividendum ut per se patet

Problema sextum

50 Algebraicas quantitates in unam summam colligere. Resolutio

Additio quantitatum Alphabeti literis expressarum obtinetur scribendo datas quantitates unam deinceps post aliam cum suis signis + et −, quae praefixa habent, vel habere intelliguntur (33). Itaque simplicium quantitatum a, b, c, et − x summa erit a + b + c − x. Item quantitatum 4a, cx, $\frac{b}{m}$, + 5am; summa erit 4a + c + $\frac{b}{m}$ + 5am; similiter compositarum quantitatum a + b + x, 3c − m, ax + 2ac − z summa erit a + b + x + 3c − m + ac + 2ax + z

$4a$
cx
$\frac{b}{m}$
$5am$
$4a + cx + \frac{b}{m} + 5am$

a
b
c
$-x$
$a + b + c - x$

Problema septimum

51 Compositas quantitates ad simpliciores expressiones reducere.

$a + b + x$
$3c - m$
$ax + 2ac - z$
$a + b + x + 3 - m + ax + 2ac - z$

Resolutio

Primo cum in eadem summa eadem quantitas bis reperitur semel signo + et semel signo − affecta, tunc omnino deleatur eadem quantitas: sic + a − a, + b + b + 7am − 7am nihil significant, signa enim + et − contraria sunt, et quod a signo + affirmatur idem a signo − negatur, unde summa

$4a - b + 4c + x - 4c$ reducitur ad simpliciorem expressionem ~~quam~~ $b + x$, quia termini $+ 4c$ et $- 4c$ se se invicem destruunt. Item quantitas composita $4a - 3b + cx - 3b + 2c - cx$ reducitur ad simpliciorem $4a + 2c$, quia termini $- 3b + 3b$, et $+ cx$, $- cx$ se se mutuo destruunt.

Secundo si in eadem summa inveniantur quantitates eisdem litteris expressae, et eodem signo $+$ per $-$ affectae tunc in unam summam colligantur ipsarum coefficientes, et summae praeponatur idem signum, et post coefficientium summam eadem quantitas semel scribatur, sic pro summa $5a + 4a$ scribatur $9a$, item quantitas $2a + b + 3a + 4b + 7a$ ad simpliciores terminos reducta, exprimitur per $12a + 5b$ similiter quantitas $4a - 3b + a - 4b$ — reducitur ad simpliciorem expressionem $5a - 7b$, atque ita de reliquis.

Tertio cum autem quantitates iisdem litteris expressae, signa habent diversa et inaequales coefficientes tunc minor coefficiens ex majori subducatur, et residuo praeponatur signum majoris. Quapropter summa $12ab + 4b - 6ab - 9b$ subductis coefficientibus 6 ex 12 et 4 ex 9, atque posito signo ~~pit~~ ante

primum residuum 7, et posito signo — ante residuum 5, eadem summa reducta exprimetur per 7 a 6 ∓ 6 b. Eadem ratione quantitas 4 a + [illegible] ∓ 4 b — a + 8 b reducitur ad 3 a + 3 c ∓ 4 b et sic de ceteris.

Problema octavum.

52 Algebraicas quantitates subtrahere.

Resolutio

Scribatur in primis quantitas major (ea rente ex qua altera subtrahenda est) cum omnibus suis signis +, et —. postea eidem quantitati adjungatur quantitas subtrahenda sed mutatis omnibus signis idest + in —, et — in +, atque habebitur quaesitum residuum ut subtrahendo c ex a idest + c ex + a, residuum erit + a — c, idest a — c. Item subtrahendo — m ex a residuum erit a + m. Similiter ex quantitate a + 2 b — c subtrahendo quantitatem m — 3 x + z, differentia seu residuum erit 3 a + 2 b + c — m + 3 x — z.

$$\frac{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}}{a-c}$$

$$\frac{\begin{matrix} a \\ -m \end{matrix}}{a+m}$$

$$\frac{\begin{matrix} 3a+2b-c \\ m-3x+z \end{matrix}}{3a+2b-c-m+3x-z}$$

Demonstratio

53 In omni subtractione (14), differentia seu residuum est id quod deest quantitati subducendae, ut adaequet quantitatem minuendam: itaque summa residui cum quantitate subducenda restituere debet minuendam quantitatem, atqui

subtractionem vel postdicendo eo modo
quo diximus etc in eo eadem vero:
[illegible] in unum colligantur (50)
residuum et quantitas subtracta semper
restituetur quantitas minuenda. Ergo
subtractio quantitatis fieri debet
addendo quantitati minuendae quan-
titatem subtrahendam variatis
omnibus subtrahendae signis.
Sic in exemplo ultimae subtractionis
si residuum inventum $3a+2b-c-m$
$+3x-z$ addatur quantitati subtractae
$m-3x+z$ fiet summa $3a+2b$
$-c-m+3x-z+m-3x+z$
quae ad simpliciores terminos reducta
(51) restituit quantitatem minuendam
$3a+2b-c$, quia termini $-m+m$,
et $+3x-3x$ et $-z+z$ evanescunt.

Problema nonum

54 Algebraicas quantitates multiplicare.

Resolutio prima

Primo cum quantitates omnes (25)
sint vel positivae, vel negativae ideo
producta, quae ex ipsarum quantitatum
multiplicatione oriuntur, eadem positiva
vel negativa erunt, consequenter
multiplicanda sunt in primis
signa datis quantitatibus praefixa,
ut inveniatur signum producto quasi
praeponendo, quod sequentibus regulis
facillime continetur.

Regula prima

55 Eadem signa inter se multiplicata semper dant + in producto nimirum cum multiplicatur + in +, vel − in −, semper in producto ponatur +. Nam multiplicare + in + est ponere positivum, ergo est affirmare. Multiplicare − in − est negare quantitatem negativam, ergo idem est eandem ponere, seu affirmare. Plures enim negationes affirmant.

Regula secunda

56 Signa contraria inter se multiplicata dant productum negativum. Id est, quando multiplicatur + in −, vel − in + productum semper erit −. Etenim multiplicare + in − est ponere negativum, sed negativum ponere, seu affirmare idem est ac negare positivum, ergo multiplicando quantitatem positivam in quantitatem negativam productum erit negativum. Multiplicare − in + est negare positivum, ergo idem est ac negativum ponere; consequenter quantitas negativa in positivam multiplicata dat productum negativum.

57 Secundo facta signorum multiplicatione juxta praecedentes regulas, si literales quantitates praefixos habent numeros (coefficientes (23)) tunc

multiplicantur inter se numeri coe=
fficientes (44)

58 Tertio tandem quantitatum literalium multiplicatio fit per simplicem literarum conjunctionem, numeros interposito signo vel interposito tantum multiplicationis signo X

Quapropter multiplicando a per m (24), et (35), idest + 1a per + 1m productum erit + 1am, hoc est am quod etiam hac ratione indicatur a X m

$+1a$
$+1m$
$+1a \times m$

Item multiplicando am per c productum erit amc per c m, vel a c m, nihil enim refert quo ordine scribantur literae.

Similiter a b c m x per a X b X c X m X x, vel a bc X m x significat productum ex a in b in c in m in x.

Eadem ratione multiplicando − 3a per 5b, idest per nimirum + 5b productum erit − 15ab; nam − in + dat − (56), et 3a in 5 producit 15 et a in b dat ab (57).

Eodem modo − 4c in − 3m producit + 12cm. Item multiplicando cm idest + 1cm per − 7mx, productum erit − 7cmmx.

Ponamus quantitatem a significare numerum 6, et quantitatem b indicare numerum 4, et quantitatem c numerum 2, ponamus nempe a = 6

$b = 4$, et $c = 2$, tunc productum ab significabit 6×4, idest 24, et productum abc, seu $ab \times c$ significabit numerum $6 \times 4 \times 2$. sive 24×2, hoc 48, quantitas vero $5abc$ significabit numerum 5×48, scilicet 240.

Resolutio secunda.

59 Si quantitas complexa (36) multiplicanda sit per quantitatem simplicem, tunc scribatur simplex quantitas sub primo compositae quantitatis termino sinistrorsum et ducta inferius linea multiplicetur simplex quantitas in singulos terminos quantitatis propositae a sinistra inci=piendo, et versus dexteram progrediendo, producta vero peculiaria infra lineam ponantur cum suis signis +, et − diligenter observando regulas omnes in praecedentibus numeris 55 56 tra=ditas.

Sit quantitas $a + 2b - c$ multiplicanda per m posita m sub primo termino a, et subducta linea, et multiplico m in a, et productum am infra lineam pono postea multiplico m in $+ 2b$, et productum $+ 2bm$ primo producto am dextrorsum adjungo, tandem multiplico m in $- c$ et productum $- cm$ scribo tertio loco

intra lineam, itaque productum ex m in $a + 2b - c$ erit $am + 2bm - cm$.

similiter multiplicando $3a + m$ per $3c$ oritur productum $9ac - 12cc + 3cm$.

60 Cum autem complexa quantitas per aliam compositam quantitatem multiplicanda est, tunc alia infra aliam scribantur datae quantitates et subducta linea singuli termini inferioris quantitatis multiplicantur singulos terminos alterius quantitatis, et singula peculiaria producta ponantur infra lineam cum suis signis +, et − et habebitur productum quaesitum.

Multiplicanda sit quantitas $a + b$ per $c + x$; posita quantitate $c + x$ infra quantitatem $a + b$, et subducta linea multiplico in primis $a + b$ per c, et pono productum (59.) $ac + bc$ infra lineam. Postea multiplico eandem quantitatem $a + b$ per x, et raddo productum $+ ax + bx$ producto jam invento $ac + bc$, ergo productum, quod oritur multiplicando $a + b$ per $c + x$ erit $ac + bc + ax + bx$.

Eadem ratione multiplicando $3a + 2b - cx$ per $4a - c$ invenietur productum $12aa + 8ab - 4cx - 3ac - 2bc + ccx$.

Item multiplicando $am - 3c + 4$ per $b - 4a + 2$, obtinetur productum.

Et $bm - 3bc + 4b - 4aam + 12ac - 16a + 2am - 6c + 8$.

Scholium primum

61 Compositarum quantitatum multiplicatio aliquando etiam obtinetur per signum multiplicationis, ducta supra multiplicatores compositos linea, sic

$\overline{a + c - x} \times \overline{b - m}$ indicat productum ex quantitate $a + c - x$ in quantitatem $b - m$

Item $\overline{4a + b - am} \times c$ significat productum $4ac + bc - am$ per c; sed $\overline{a - m + b} \times c$ aequivalet quantitati $a - m + bc$.

Alia etiam ratione indicatur productum quantitatum compositarum, nimirum includendo parenthesi multiplicatorem et multiplicandum ut $(a - c)(m - x)$ indicat productum ex $a - c$ in $m - x$.

Item $(a + b)m$ significat productum ex $a + b$ in m.

Scholium secundum.

62 Praeterea molestum sit eandem litteram in eodem producto pluries iterare, ideo sicuti in additione (51) summa $a + a$ brevius exprimitur

per 2 a^4, summa $6+6+6$ per 36,
ita in quantitatum multiplicatione
productum aa designatur a^2: ponendo
nempe numerum 2 dextrorsum, et paullo
supra litteram a.
Item productum aaa indicatur per
hanc rem a^3.
Similiter 6^4 significat productum ex 6 in
6 in 6 in 6, atque ita de reliquis.
63 Numero vero ad dexteram, et paullo
supra literas positi dicuntur indices
sive exponentes earundem quantitatum
quia indicant producta ex iisdem
quantitatibus per semetipsas semel vel
bis, vel pluries multiplicatis
64 Quantitates, quae nullum habent expo=
=nentem, semper intelliguntur habere
unitatem, sic a significat a^1 m idem
valet ac m^1.
65 Quando quantitates inter se multiplicandae
ab iisdem literis exprimuntur tunc in
unam summam addantur exponentes,
et habebitur earundem quantitatum
productum.
Sit quantitas a^3 multiplicanda per a^2
productum erit a^5.

Demonstratio

Nam a^3 significat productum aaa
et a^2 significat aa sed quantitas
aaa multiplicata per aa dat
productum aaaaa quod (62)

brevius exprimitur per a^5, ergo multi-
plicando a^3 per a^2 productum erit per a^5.
Consequenter summa exponentium indicat
productum quantitatum, quae in eisdem
literis exprimuntur. Itaque multiplicando
b^4 per b^3 productum erit b^7, et multiplicando
a seu a^1 (64) per a^7 productum erit a^8
Item multiplicando $a^3 b^5$ per $a^4 b^3$
productum erit $a^7 b^8$
similiter quantitas $4a b^8 x$ multiplicata
per $3a^4 b^3 m$ dat productum $+12$
$a^5 b^{11} m x$ quapropter quando quantitates
inter se multiplicandae jam sunt producta
ex multiplicatione plurium quantitatum
ab eisdem literis expressarum. Sic
multiplicando $a^4 c^2$ per $a^2 b x^3$ per $a c^4$
productum erit $a^7 b c^6 x^3$, et ita de reliquis.

66 Hic diligenter notandum est magnum
intercedere discrimen inter quantitatem
habentem quemlibet numerum coefficientem
et inter eandem quantitatem, quae
eundem numerum pro exponente
habeat. Sic multum inter se differunt
$2a$, et a^2, $3a$, et a^3, etenim ponatur
quantitatem a, significare numerum 5;
nimirum fiat $a = 5$, tunc erunt
$2a = 10$, $3a = 15$, $4a = 20$ (22); sed
a^2, sive $a \times a$ erit $= 5 \times 5 = 25$,
et $a^3 = a^2 \times a = 25 \times 5 = 125$,
et $a^4 = a^3 \times a = 125 \times 5 = 625$

Item si fuerit $m = 10$ erit $3m = 30$,
sed m^3 erit $= 1000$, et sic de ceteris.

Problema decimum.

67 Algebraicas quantitates dividere.

Resolutio prima.

Primo in quantitatum divisione omnino ut in multiplicatione (53) (56) eadem signa ponant + et diversa —, idest si dividatur + per +, aut — per —, semper quotienti praefigatur signum +, et dividendo + per —, vel — per + semper quotienti signum — praeponatur.

Secundo coefficientes si adsint, separatim dividantur juxta regulas traditas in problemate quinto.

68 Tertio deleantur ex dividendo literae illae, quae etiam continentur in divisore et habebitur quaesitus quotiens ut dividendo ab per a quotiens erit b; nam quotiens b in divisorem a multiplicatus, restituit dividendam quantitatem ab.

Eadem ratione dividendo $aacx$, per $-ac$, quotiens erit $-ax$, quia $-ac \times -ax$ restituit dividendam quantitatem $aacx$.

Item dividendo $15abm$ per $3ab$, quotiens erit $5m$, quia $5m \times 3ab$ restituit $15abm$.

69 Quarto quando omnes divisoris litera non continentur in dividendo, tunc quotiens exprimitur per fractionem, cujus numerator sit dividenda quantitas, et denominator sit divisor, ut dividendo a per b, quotiens erit $\frac{a}{b}$, et dividendo c per $-m$, quotiens erit $\frac{c}{-m}$. Item divendo $6am$ per $3bx$, quotiens erit $\frac{6am}{3bx}$, vel $\frac{2am}{bx}$, quia coefficiens 6 dividi potest, per coefficientem 3. Similiter dividendo acx per mx, quotiens erit $\frac{acx}{mx}$.

70 Quinto si eadem litera inveniantur tam in divisore, quam in dividendo et habeant numeros exponentes (63) tunc subtrahatur exponens divisoris ab exponente dividendi, et residuum erit exponens quotientis.

Ut dividendo m^5 per m^3 quotiens erit m^2

Demonstratio

Nam si per extensum scribantur m^5 (62) equivalet quantitati $mmmmm$, et m^3 adaequat mmm et dividendo $mmmmm$ per mmm quotiens (68) erit mm, idest m^2 (63) ergo etiam dividendo m^5 per m^3 quotiens erit m^2; unde patet, exponentes divisoris subtrahendos esse ab exponentibus quantitatibus dividendae ut habeatur quaesitus quotiens.

Similiter dividendo $-a^7$, per $-a^3$ quotiens erit $+a^4$, seu a^4.
Item dividendo $8a^3b^4c$ per $4a^3b^2c$ obtinetur quotiens $2b^2$, quia $2b^2$ multiplicatum in $4a^3b^2c$ restituit $8a^3b^4c$.

71 Praeterea quaelibet quantitas per semetipsam divisa dat pro quotiente unitatem, seu 1; nam quaelibet quantitas seipsam semel continet, ideoque dividendo a per a quotiens erit 1, quia quotiens 1 multiplicatus per divisorem a restituet dividendam quantitatem $1a$, idest a.
Item dividendo $5b$ per $5b$ per $4ax$, per $4ax$ per $7a^3b$ per $7a^3b$; quotiens semper erit 1, ut per se patet.

Corrolarium

72 Hinc sequitur quantitatem habentem pro exponente cifram 0 aequalem esse unitati sic a^0 significat 1 nam ut dividatur exempli gratia quantitas a^3 per quantitatem a^3 juxta regulam traditam numer: 70, subtrahendus est exponens 3 divisoris a^3 ab exponente 3 dividendi a^3, et residuum 0, ponendum est pro exponente quotientis; ideoque dividendo a^3 per a^3 quotiens est a^0, at quaelibet quantitas per semetipsam divisa (71) dat pro quotiente unitatem unde dividendo a^3 per a^3, quotiens

est 1, ergo a^0 significat 1, eadem ratione quantitas b^0 significat 1.
Item a^0 ~~signo~~ x^0 significat 1 quia $a^0 x^0$ idem valet ac $a^0 \times x^0$, sive 1×1 idest 1.
Quapropter dividendo $a^3 b$ per $a^2 b$ idest $a^3 b^1$ per $a^2 b^1$, quotiens erit $a b^0$, sive $a^1 \times b^0$, idest $a \times 1$, quod idem significat ac $1\, a^1$, idest a

Resolutio secunda.

73 Si quantitas complexa per simplicem quantitatem dividenda est, tunc scribitur datae quantitates ut in exemplo primo Problematis quinti. Deinde singuli termini complexae quantitatis dividantur per datum divisorem ut videre est in sequentibus exemplis.

Sit quantitas dividenda $ab + ac - ax$, et divisor sit a posito divisore a ad dexteram quantitatis dividendae, et ducta inferius linea, primo dividatur terminus ab et quotiens b scribatur infra divisorem, et erit primus quotientis terminus postea dividatur secundus terminus $+ ac$ per a, et quotiens $+ c$ scribatur pro secundo quotientis termino. Tandem dividatur $- ax$ per a, et quotiens $- x$ erit tertius terminus.

quaesiti quotientis, atque erit $b c - x$ quotiens, qui oritur dividendo quantitatem $ab ac - ax$ per a, nam multiplicando quotientem $b + c - x$ per divisorem a emittitur divisa quantitas $ab + ac - ax$. Eodem modo dividendo $8ab - 12am + 4a$ per $4a$, invenitur quotiens $2b - 3m + 1$.

Item dividendo $6ac - 9abc + 12acx - 3ac$ per $3ac$, quotiens erit $2 - 3b + 4x - 1$.

Pari ratione si dividatur $3ab - bc - 3b + bm$ per $-b$, invenietur quotiens $-3a + c + 3 - m$.

74 Si quantitas dividenda terminos habeat, qui per datum divisorem dividi nequeant, tunc eorundem terminorum divisio fiat per modum fractionis. Ut dividendo $ac - cm + ab - x$ per c quotiens erit $a - m + \frac{ab}{c} - \frac{x}{c}$ vel erit $a - m + \frac{ab - x}{c}$. Similiter dividendo $a + bc - x$ per m, quotiens exprimetur per fractionem $\frac{a + bc - x}{m}$.

75 Cum vero quantitas complexa per aliam compositam quantitatem dividenda est, tunc ad dexteram quantitatis dividendae interposita linea scribatur divisor, et sub divisore ducatur alia linea

atque operatio eodem modo pera=
=gatur, ut in divisione numerorum
exempla per rem declaramus
Si quantitas dividenda $ab+am-ax$,
et divisor sit $b+m-x$.
Primo dividatur terminus ab per
terminum b divisoris, et quotiens
a ponatur infra lineam sub
divisore. Postea multiplicatur
inventus quotiens a in totum
divisorem $b+m-x$, et productum
$ab+am-ax$ subtrahatur ex
quantitate dividenda, scribendo
$-ab-am+ax$ vel post
quantitatem dividendam ab
$+am-ax$, atque deletis
terminis aequalibus a signis
contrariis affectis, residuum erit 0
proindeque a est quotiens hujus
divisionis, nam multiplicando
divisorem $b+m-x$ per quotientem
a, restituitur divisa quantitas
$ab+am-ax$; idem quotiens
obtinetur si dividatur terminus
am per secundum terminum
m divisoris, vel dividatur ter=
=minus ax per terminum respon=
=dentem $-x$.

76 Quando divisoris termini aeque
continentur in respondentibus ter=
=minis quantitatis dividendae,

tunc liberum est divisionem instituere per quemlibet divisionis terminum qui tamen semel assumtus semper adhiberi, sed unquam mutari potest, ut videre est in sequenti exemplo.

Dividenda sit quantitas $aa - bb + 2bc - cc$ per $a + b - c$, tunc scribantur primo ut antea dictum fuit, postea instituatur divisio per aliquem divisoris terminum exempli gratia per a et dividatur terminus aa per a, quotiens (68) erit a, qui ponatur infra lineam sub divisore ductam, et Multiplicetur a in totum divisorem $a + b - c$, et productum $aa + ab - ac$ subtrahatur ex quantitate dividenda nimirum, mutatis signis scribatur $-aa - ab + ac$, post vel infra quantitatem dividendam $aa - bb + 2bc - cc$ habetur residuum $aa - bb + 2bc - cc - aa - abc + ac$ et deletis terminis $+ aa - aa$ qui nihilo aequantur, remanebit dividenda quantitas $- bb - 2bc - cc - ab + ac$ hujus quantitatis dividatur terminus $- ab$ per assumtum divisoris terminum a, et quotiens a (67, 68) erit $- b$, qui scribatur post primum quotientis terminum jam inventum

a et multiplicetur $-b$ in divisorem $a+b-c$, productumque $ab-bb+bc$ subtrahatur ex quantitate dividenda infra eandem scribendo $+ab+bb-bc$, et residuum erit $-bb+2bc-cc-ab+ac+ab+bb-bc$, quod ad simpliciores terminos reducatur (51), et remanebit quantitas dividenda $bc-cc+ab$, cujus terminus $+ac$ dividatur per assumptum divisoris terminum a quotiens erit $+c$, qui ponatur pro tertio quotientis termino atque idem c multiplicetur per divisorem $a+b-c$, et productum $ac+bc-cc$ subtrahatur ex dividenda quantitate $bc-cc+ac$ residuum erit $bc-cc+ac-ac-bc+cc$ æquale nihilo, quia bc, et $-bc-cc+cc+ac$ et $-ac$ sese invicem destruunt, unde quotiens erit $a-b+c$.

Qui enim multiplicetur $a-b+c$ per divisorem $a+b-c$ productum $aa-ab+ac+ab-bb+bc-ac+bc-cc$ ad simpliciores terminos productum (51) restituit dividendam quantitatem $aa-bb+2bc-cc$.

77. Quando divisor habet terminos qui atque non continentur in respondentibus terminis, quantitatis

dividenda, tum divisio semper instituatur per illum divisoris terminum, qui plures, vel saltem integras vices continetur in dividendae quantitatis terminis. Exempli gratia si quantitas $a^3 - b^3$ dividenda sit per $a^2 + ab + b^2$, tunc divisio institui potest per a^2 vel per b^2, qui aequaliter continentur in respondentibus terminis a^3, et $-b^3$; at nequaquam instituatur per ab nunquam enim invenietur quotiens quaesitus $a - b$.

78 Quod si facta divisione aliquid remanet in dividenda quantitate, quod per assumtum divisoris terminum dividi nequeat, quaeri illud residuum scribatur post inventum quotientem cum propriis signis $+$, et $-$ illi supponendo totum divisorem, sit dividenda quantitas $aa + bb$, et divisor $a - b$, et dividatur aa per a, et quotiens a multiplicetur in divisorem $a - b$, et productum $aa - ab$ subtrahatur ex quantitate dividenda residuum erit $aa + bb - aa + ab$, idest (num. 52) erit $bb + ab$, atque hujus residui dividatur terminus $+ ab$ per assumtum divisoris terminum a, quotiens erit b, qui ducatur in divisore

$a-b$, et productum $ab-bb$ subducatur ex quantitate dividenda $bb+ab$ residuum erit $bb+ab-ab+bb$, idest (51.) erit $2bb$, quod dividi nequit per assumptum divisoris terminum a ideoque in quotiente post $a+b$ scribatur $+\frac{2bb}{a-b}$ et erit quaesitus quotiens $a+b+\frac{2bb}{a-b}$

79 Similiter quando nullus dividendae quantitatis terminus dividi potest in integris per nullum divisoris terminum, tunc quotiens exprimitur per fractum, cujus numerator sit dividenda quantitas, et denominator sit divisor. Ut dividendo $ab+aa$ per $m-x$ quotiens erit $\frac{ab+aa}{m-x}$.

80 Praeterea quantitatum compositarum divisio aliquando etiam exprimitur includendo dividendum, et divisorem parentesi, et inter illos apponendo duo puncta, ut $(a+b):(c-x)$ indicat quotientem $\frac{a+b}{c-x}$. Item $(ab-x):m$, idem significat atque $\frac{ab-x}{m}$.

Elementorum
Aritmeticae universalis
Liber secundus
De calculo fractorum
Definitio prima.

81 Cujusvis quantitatis pars aliquota

dicitur illa, quae aliquoties repetita suum locum constituit, sive est illa per quam dividendo datam quantitatem, obtinetur quotiens integer sine fractione. Sic 3 est pars aliquota numeri 12, quia 3 quater sumptus constituit numerum 12, quia sive numerus 3 est integra quarta pars ejusdem numeri 12.
Similiter 7 est pars aliquota numeri 21, quia dividendo 21 per 7. quotiens est numerus integer 3. pars vero illa quae aliquoties sumpta ~~sumpta~~ totum constituit, sed ipsum vel excedit vel ab eodem deficit dicitur pars aliquota sic 4 est pars aliquota numeri 14, quia numerus 4 ter sumptus deficit a numero, et quater sumptus ipsum ~~vel~~ ~~excedit~~ excedit, vel a

Definitio secunda

82 Numerus alium numerum metiri dicitur, quando aliquoties sumptus alterum adaequat, scilicet quando est pars aliquota alterius numeri. itaque mensura numeri est alius numerus, qui ipsum metitur. estque quaelibet ejusdem numeri pars aliquota; numerus 3 exempli gratia metitur numerum 12 per 4, hoc est si quater repetatur.
Item 2, et 5 sunt mensurae numeri 10.

Maxima vero mensura numeri est
est, numerus, qui ipsum dimetiur:
ut mensurae numeri 12 sunt 1, 2, 3, 4,
6, et maxima mensura ejusdem
numeri 12 est 6, ut patet.

Definitio tertia.

63 Numerus ille qui est pars aliquota
quorum, vel plurium numerorum
dicitur communis mensura eo:
=rundem numerorum: sic 3 est communis
mensura numerorum 6, et 15, quia
singulos sigillatim metitur. Item
numerus 12 est communis mensura
omnium numerorum parium.
Unitas vero est communis mensura
omnium numerorum integrorum.

64 Definitio quarta.

Numerus primus, seu incom:
=compositus vocatur ille, quem
sola unitas metitur: sic numeri
2, 3, 5, 7, 11, &c., qui singuli
nullam habent mensuram
praeter unitatem, sunt numeri
primi, seu incompositi.

Definitio quinta.

65 Numerus incompositus vocatur
ille, quem praeter unitatem
aliquis numerus ab ipso diversus
dimetitur, ut 6, est numerus in:
=compositus, quia habet mensuras
2, et 3.

Definitio sexta

86 Numeri primi inter se, vel incom=
=positi inter se dicuntur, qui nullam
aliam mensuram communem habent
excepta unitate. Ita 8, et 15
sunt numeri inter se primi, quia
nullus numerus utrumque dimetitur.
Eadem ratione numeri 5, 6, 12, et 17
sunt numeri primi inter se.

Definitio septima

87 Numeri inter se compositi dicuntur
illi qui, praeter unitatem aliam
habent communem mensuram,
ut numeri 6, 12, 15 sunt compositi
inter se, quia habent communem
mensuram 3.

Corrolarium

88 Quoniam quilibet numerus se ipsum
semel metitur, ideo communis men=
sura numerorum inter se compo=
=sitorum potest esse unus eorundem
numerorum, sicut numeri 5, 15, et 20
sunt inter se compositi, quia 5
dimetitur se ipsum et alios 15, 20.

Definitio octava

89 Maxima communis mensura
duorum pluriumve numerorum
est numerus maximus qui eos
omnes metitur, sive est numerus
ille per quem dividendo singulos
datos numeros oriuntur numeri

quotientes, qui sunt inter se primi. Ut numerorum 12, et 18 maximus communis mensura est 6, quia dividendo 12 et 18 per 6, obtinentur quotientes 2, et 3, qui sunt numeri primi inter se.

Definitio nona.

90 Fractio quaelibet (numeri 9, 10, 34) minimis terminis expressa dicitur quando ejus numerator, et denominator sunt numeri inter se primi (86) ut fractio $\frac{4}{5}$, Item $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ sunt fractiones minimis terminis expressae.

Definitio decima.

91 Fractiones ejusdem nominis sunt illae quae habent eundem denominatorem ut sunt fractiones $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ vel $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{b}$ $\frac{m}{b}$.

Diversi nominis dicuntur fractiones quae habent denominatores diversos, ut sunt $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ vel $\frac{a}{c}$ $\frac{b}{m}$ $\frac{a}{x}$ &c.

Definitio undecima.

92 Quidquid est, vel esse posse concipitur dicitur res: res autem una ad alteram referri dicitur quando illae simul considerantur, et inter eas proprietates quae alteri absolute conveniunt aliqua occurrit, per quam aliquid de prima re intelligi possit quod sine altera intelligi non

poterat: exempli gratia sumantur duo numeri 5, et 8. Si numerus 8 in se consideretur, tunc invenietur 8=7+1 8=6+2, 8=5+3, 8=4+4 &c. at simul considerando numeros 5, et 8, quia est 8=5+3, perspicimus numerum 5 esse partem numeri 8, atque tunc refertur 5 ad 8.

Definitio duodecima.

93 Quidquid autem datae rei absolute non convenit, sed tantum ei convenire intelligitur, quando ad alteram rem refertur, id relatio dicitur, sic de numero 5 in se spectato non intel=
=ligitur, quod sit pars numeri 8 nisi quando numerus 5 ad numerum 8 referatur, neque de numero 8 in se considerando intelligitur quod sit major numero 5, nisi quando 8 refertur ad 5, atque esse partem numeri 8, seu ipso minorem est quaedam relatio, sicut quaedam relatio majorem esse numero 3.

Definitio decima tertia

94 Ratio geometrica est illa unius rei ad alteram ejusdem generis relatio, quae determinat magnitudinem unius per magnitudinem alterius rei, sine subsidio rei tertiae homogeneae. Sint exempli gratia duae longitudines, quarum una vocetur A, et sit pedum quatuor, et altera longitudo

B sit pedum 20: si referatur A ad B idem si sumatur pro mensura longitudo A pedum 4 invenietur longitudinem A quinquies contineri in longitudine B pedum 20 consequenter erit longitudo A ad longitudinem B sicuti unum ad quinque erit ergo quinta pars longitudinis B si autem referatur B ad A hoc est si sumatur pro mensura longitudo B, tunc invenietur longitudinem B quinquies continere longitudinem A, ideoque erit longitudo B ad longitudinem A, sicuti quinque ad unum nimirum longitudo B erit quintupla longitudo A, Itaque tam relatio longitudinis A ad longitudinem B, quam relatio longitudinis B ad longitudinem A determinatur sine tertia longitudine assumta, consequenter sunt duae rationes geometricae A ad B et B ad A.

Corrolarium

95 Quoniam in omni ratione (10) denominator indicat unitatem seu totum divisum in partes, et numerator partes numerat in casu proposito datas, ideo relatio numeratoris ad denominatorem intelligitur sine tertio homogeneo,

assumto consequetur ipsa relatio vel ratio geometrica.

Definitio decima quarta

96 In omni ratione geometrica quantitates, quae inter se comparantur, dicuntur termini rationis atque primus terminus, qui ad alterum refertur, antecedens rationis vocatur, et secundus, ad quem primus refertur, consequens rationis dicitur. Sic rationis 12 ad 3 terminus 12 est antecedens, et 3 est consequens rationis.

Signum vero quo utimur ad quamlibet rationem exprimendam sunt duo puncta quae ponuntur inter antecedentem, et consequentem, et significant ad.

Sic 12 : 3 legitur duodecim ad tres. Item c : m enunciatur c ad m

Definitio decima quinta

97 Nomen rationis quod etiam dicitur valor rationis, vel exponens rationis est quotiens, qui oritur dividendo antecedentem per consequentem, ideoque rationis 8 : 2 nomen erit $\frac{8}{2}$ hoc est 4, et rationis 2 : 6 valor erit $\frac{2}{6}$. Item rationis ab : a valor erit $\frac{ab}{a}$ idest b, et rationis m : c exponens erit $\frac{m}{c}$, et ita de reliquis.

Corrolarium

98 Hinc quælibet ratio æqualis est fractioni hujus numerator sit antecedens rationis, et denominator sit consequens ejusdem rationis. Atque de converso (95) quælibet fractio adæquat rationem geometricam, hujus antecedens sit numerator fractionis, et consequens sit denominator ejusdem fractionis. Ut data ratione 8:2 ejus exponens erit fractio $\frac{8}{2}$ idest 4. Vicissim data ratione $\frac{8}{2}$ hujus valor est 4 efficitur æqualis ratio 8:2.

Definitio decima sexta

99 Rationes similes seu æquales sunt illæ, quæ habent exponentes seu valores æquales, sive quarum antecedentes eandem relationem habent ad suos consequentes. Ut rationes 6:2, 15:5 sunt æquales, quia (97), habent eandem exponentem 3; est enim $\frac{6}{2}=3$, et $\frac{15}{5}=3$ sive quia 6 est triplum numeri 2, sicut 15 est triplum numeri 5. Rationes vero inæquales sunt illæ, quæ habent exponentes diversos, sive quarum antecedentes non habent eandem relationem ad suos consequentes, ut duæ rationes 12:3 et 30:15 sunt inæquales, quia exponens primæ est $\frac{12}{3}$ sive 4, et alterius rationis exponens est $\frac{30}{15}$

idest 2 ideoque ratio 12:3 major est ratione 30:15, quia est $\frac{12}{3} > \frac{30}{15}$ hoc est $4 > 2$

Corrolarium primum

100 Quoniam fractiones (98) sunt rationes geometricae, ideo fractiones aequales sunt illae, quae constituunt rationes aequales, sive quarum numeratores eandem relationem habent ad suos denominatores; sic fractiones $\frac{2}{6}$ et $\frac{5}{15}$ sunt aequales, quia numerator 2 est tertia pars sui denominatoris 6, sicut numerator 5 est tertia pars sui deno=minatoris 15; sive quia utraque ipsarum exprimit tertiam partem unius integri.

Inaequales vero dicuntur fractiones, quando constituunt rationes inaequales. Sic ratio $\frac{3}{6}$, quae significat tres sextas partes, idest medietatem unius integri, major est fractione $\frac{5}{15}$, quae quinque decimas quintas partes, hoc est tertiam partem unius integri exprimit.

Quapropter aequales rationes consti=tuunt fractiones aequales; et e converso aequales fractiones efficiunt rationes aequales.

Corrolarium secundum

101 Hinc multiplicando, vel dividendo numeratorem, et denominatorem

cujusvis fractionis per eandem
quantitatem, rationis valor non
mutatur. Nam eandem relationem
habet numerator cujusvis fracti
ad suum denominatorem, quam
habent, vel duplum numeratoris
ad duplum denominatoris, vel
triplum numeratoris ad triplum
denominatoris, vel dimidium
numeratoris, ad dimidium denumeratoris
vel tertia pars denumeratoris, ad tertiam
partem denumeratoris &c. Ut si
fractionis $\frac{4}{12}$ multiplicentur numerator
4, et denominator 12 per 2 fiet
alia fractio $\frac{8}{24}$ = fractio $\frac{4}{12}$, quia 8 est
pars tertia numeri 24, sicut 4 est
tertia pars denominatoris 12, sive
quia tam 8 vigesima quarta integri
partes, quam quatuor duodecimae
partes eandem exprimunt integri
partem, id est tertiam.
Quod si numerator 4, et denominator
12 dividantur ambo per 2 quotientes
2, et 6 constituent fractionem $\frac{2}{6}$
ejusdem valoris, cum fractio $\frac{4}{12}$, quia
duae sextae integri partes, etiam tertiam
integri partem indicant, similiter
data fractione $\frac{ab}{a}$, multiplicando
numeratorem ab, et denominatorem
a, per eandem quantitatem c
habebitur alia fractio $\frac{abc}{ac}$, aequalis

dare $\frac{ab}{a}$, quia dividendo tam abc per ac, quam ab per a, idem quotiens b obtinetur.
Vicissim data fractione $\frac{abc}{ac}$, si dividantur numerator abc, et denominator ac per eandem quantitatem a, habebitur alia fractio $\frac{bc}{c}$ æqualis fractioni $\frac{abc}{ac}$, nam $\frac{bc}{c}$ significat b, et valor fractionis $\frac{abc}{ac}$, et pariter b.

Definitio decima septima

102 Æquatio est duarum æqualium quantitatum (27) comparatio, quæ fit ponendo signum æqualitatis (32) inter duas æquales quantitates sive est expressio ejusdem quantitatis per duos valores diversos, sed æquales.
Ut $a=b$ est æquatio, in qua exprimitur valorem a æqualem esse valori b.
Item æquatio $4+3=12-5$ significat valorem $4+3$ æqualem esse valori $12-5$. In omni æquatione quantitas posita ante signum æqualitatis dicitur prima pars æquationis, et quidquid reperitur post signum $=$, vocatur secunda pars æquationis.

Axioma primum

103 Quæ eidem sunt æqualia, et inter se pariter æqualia sunt.

Sit $a=m$ et $mb=m$ per hoc Axioma
erit etiam $a=b$.
Item si fuerint $6-2=4$, et $7-3=4$
erit $6-2=7-3$.
Praeterea quod uno aequalium
majus, vel minus est etiam
reliquo aequalium majus, vel
minus erit.
Ut posito $a=c$, si alia quantitas
m major fuerit quantitate a
erit etiam m major c. Si vero
m fuerit minor quantitate a,
erit pariter m minor quantitate
c.

Axioma secundum

104 Si aequalibus aequalia, vel eadem,
addas, quae fiunt sunt aequalia.
Datae sint aequationes $a=c$, et $b=m$
colligendo primam cum secunda erit
$a+b=cm$
Item si fuerit $a=c-m$, et utrinque
addatur eadem quantitas m,
habebitur $a+m=c-m+m$, idest
$a+m=c$ (51)

Axioma tertium

105 Si ab aequalibus aequalia, vel
eadem demas, quae remanent sunt
aequalia.
Sit $a=b$, et $c=m$, erit $a-c=b-m$
Item posito $b=a+m$, auferendo
utrique quantitatem m, remanebit

$b-m=a+m-m$, hoc est $b-m=a$ (51).

Corrolarium

106 Hinc si unus, vel plures termini ex una in alteram aequationis partem, mutatis signis $-$ in $+$, et $+$ in $-$, transferantur quantitates semper remanebunt aequales, quia vel aequalibus aequalia adduntur, vel ab aequalibus aequalia aufe=runtur.

Sit aequatio $7=12-5$, transferatur -5 ex secunda in primam partem aequationis, mutato signo $-$ in $+$, habebitur alia aequatio $7+5=12$ quia transferre -5 cum signo mutato, est adjungere 5 utrique parti aequationis $7=12-5$; nam (axiomate secundo) habetur $7+5=12-5+5$, hoc est $7+5=12$, quia -5, et $+5$ (51) in eadem summa evanescunt.

Quod si in aequatione $7+5=12$ trans=feratur terminus 7 ex prima in secundam partem aequationis mutato signo $+$ in $-$, habebitur alia aequatio $5=12-7$. Si enim ex utraque parte aequationis $7+5=12$, subtrahatur 7 (axiomate tertio) remanebit $9+5-7=12-7$ idest (51) $5=12-7$.

Similiter data aequatione $14=10+8$

-2 transferendo terminos b et -2, variatis signis, erit talia aequatio $14+2-6=10$, ut patet.

Nec autem translatio illius vel plurium terminorum ex una in alteram aequationis partem cum signis mutatis, quae nunquam Cautionia secundum et tertium aequationem tollit apel=
=latur Antithesis.

Definitio decima septima

107 Axioma quartum

Si quantitates aequales multipli=
=centur per eandem vel per aequales quantitates producta erunt aequalia inter se. Si aequatio $a=c$ multiplicando aequales quantitates a et c per m, habebitur $am=cm$.

Item si fuerint $a=b$, et $c=m$ multiplicando aequales quantitates a et b per aequales c, et m producta erunt aequalia. Erit nempe $ac=bm$ vel $am=bc$

Similiter si aequatio $6-2=4$ multi=
=plicatur per tres habebitur nova aequatio $18-6=12$

Axioma quintum

108 Si aequales quantitates dividantur vel per aequales quantitates quoti=
=entes erunt pariter aequales inter se. Sit aequatio $ac=cm$, quae dividatur per c remanebit $\frac{ac}{c}=\frac{cm}{c}$ idest

(66) $a = m$

Item dividendo aequationem $12-4=8$ per 2, remanebit $\frac{12}{2} - \frac{4}{2} = \frac{8}{2}$; hoc est $6-2=4$.

Similiter si fuerint aequationes $a=b$, et $c=m$, dividendo primam aequationem per secundam, habebitur nova aequatio $\frac{a}{c} = \frac{b}{m}$; dividuntur enim aequales quantitates a, et b per aequales quantitates c, et m.

Axioma sextum

109 Si inaequalibus aequalia addas, quae fiunt, sunt inaequalia, ut inaequalibus 8 et 4, addendo eandem quantitatem 2 erunt $8+2$; et $4+2$ etiam inaequalia, hoc est si fuerit $8>4$, erit etiam $8+2>4+2$, idest $10>6$.

Similiter si fuerint $a>c$, et $b=m$ erit etiam $a+b>c+m$.

Axioma septimum

100 Si ab inaequalibus aequalia demas, quae remanent, sunt inaequalia, sit $12>8$, erit etiam $12-2>8-2$, hoc est $10>6$.

Item datis $a>c$, et $b=m$, erit etiam $a-b>c-m$, quia ab inaequalibus a et c, auferendo aequales quantitates b, et m, reliquae magnitudines $a-b$, et $c-m$ erunt etiam inaequales.

Axioma octavum

111 Quae ejusdem, vel aequalium sunt

dupla, vel tripla, vel quatrupla &c.
sunt aequalia inter se. Sit a duplum b
et c duplum ejusdem b erit a = c.

Axioma nonum

112 Quae ejusdem vel aequalium sunt
dimidia, tertia pars, vel quarta &c.
sunt etiam aequalia necessario,
quarta pars m, et c sit etiam quinta
pars ejusdem quantitatis m erit a = c

Axioma decimum

113 Totum est majus sua parte.

Axioma undecimum

114 Totum est aequale omnibus suis
partibus simul sumptis.

Scholium

115 In hoc axiomate loquimur de iis
partibus, quae totum ingrediuntur,
sive de iis quae simul toti inesse possunt,
non vero de quibuslibet possibilibus
quae absolute partes sunt. ex. gr. causa
numerus 12 constat ex septenario
et quinario, est igitur 12 = 7 + 5.
Idem numerus 12 constat etiam
ex denario, et binario, ideoque est
12 = 10 + 2, at quamvis 10, et 7
absolute sint partes numeri 12
memoriae. Concludit esse numerum 12
aequalem summae 10 + 7, quia partes
10, et 7 simul toti inesse nequeunt.
Nam quando 10 ponitur pars
numeri 12, tunc praeter binarium

vel 1+1 nulla alia pars eidem inesse
potest.

Axioma duodecimum

116 Quantitas illa, quae neque major neque
minor esse potest alia quantitate
homogenea est ipsi aequalis. Nam
quantitates homogeneae (26) semper
aequales sunt inter se, vel inaequales.
Sint a et m duae quantitates homogeneae,
atque prima a neque adeo major,
nec minor altera m, hinc erit
$a = m$.

Axioma decimum tertium

117 Si prima quantitas major fuerit
secunda, et secunda similiter tertia
tunc eadem prima quantitas erit
etiam major tertia.
Sit $a > b$, et $b > m$ erit etiam $a > m$.

Propositio prima
Theorema

118 Si quaelibet fractio multiplicetur
per suum denominatorem
productum erit numerator
ejusdem fractionis.

Demonstratio

Fractio exprimit quotientem (34 79), qui
oritur dividendo numeratorem per
denominatorem ejusdem fracti, sed
cujusvis divisionis quotiens (49, et
problemate decimo, multiplicatus per
divisorem residuus dividendum

quantitatem, ergo multiplicando fractionem quae quotientem indicat per suum denominatorem, qui divisorem repraesentat, productum erit numerator fractionis, qui dividendam quantitatem significat. Quapropter multiplicatur ratio per suum denominatorem, satis est ipsum denominatorem delere. Quod erat ostendendum.

Sic fractio $\frac{12}{4}$ (quae significat 3), multiplicata per denominatorem 4, dat productum 12, hoc est numeratorem fractionis. Similiter fractio $\frac{a}{3}$ multiplicata per 3, dat productum a.

Item fractio $\frac{a}{m}$ multiplicata per m, dat productum a. Et fractio $\frac{c-b}{m}$ multiplicata per m producit $c-b$.

Propositio secunda

Problema

119 Integrum in fractionem dati denominatoris convertere.

Resolutio

Multiplicatur integer per denominatorem datum, et producto supponatur ipse denominator.

Ut si integer 5 reducendus sit ad fractionem cujus denominator sit 12: multiplicato integro 5 per denominatorem datum 12, producto 60 subscribatur ipse denominator 12, erit $\frac{60}{12}$ quae fractio aequalis integro 5.

Similiter si quantitas a reducenda sit ad fractionem denominatoris m erit $\frac{am}{m}$ quaesita fractio habens denominatorem m et aequalis quantitati a quia $\frac{am}{m}$ (606) significat a. Eadem ratione quantitas c reducitur ad fractum, hujus denominator sit a—m multiplicando c per a—m, et producto ac—cm subscribendo datum denominatorem a—m eritque $\frac{ac-cm}{a-m}$ quaesita fractio aequalis quantitati c (75).

Item unitas reducitur ad fractum hujus denominator sit 7, multiplicando 1 per 7, et subscribendo denominatorem 7 producto 7: ideoque erit $\frac{7}{7}$ fractio aequalis unitati, et habens denominatorem 7.

Eodem modo fractio $\frac{a}{a}$ significat 1.

Corrolarium primum.

120 Hinc fractio hujus numerator aequalis est denominatori, significat unum integrum, quia numeratio omnes partes integri divisi in tot partes, quot continentur in denominatore consequenter singulae fractiones $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{15}{15}$ &c. significant 1.

At fractio, cujus numerator major est denominatore continet plus quam unum integrum. Sic fractio $\frac{5}{4}$ significat unum integrum, et insuper $\frac{1}{4}$, idest quartam unius integri partem. Item $\frac{13}{8}$

significat integrum 2, et insuper fractum $\frac{1}{3}$ &c.
Quum vero numerator minor est deno=minatore, tunc fractio minus quam unum integrum significat, ut $\frac{2}{3}$ exprimit tantummodo duas tertias partes unius integri in tres partes divisi.

Corrolarium secundum

121 Si cuilibet integrae quantitati sup=ponatur unitas pro denominatore habebitur fractio, seu quasi fractio integro aequalis, sic $\frac{5}{1}$ significat 5, $\frac{12}{1}$ significat 12, $\frac{a}{1}$ significat a; Idem $\frac{6-x}{1}$ valet $6-x$ &c. nam ponere unitatem pro denominatore integri, idem est ac integrum datum in fractionem educere, cujus denominator sit 1.

Corrolarium tertium

122 Fractio reducendi mensuras, pondera, et monetas in alias inferioris speciei deducitur ex hoc problemate. Quoniam exempli causa denarii sunt partes duodecimae solidi, et solidi sunt partes vigesimae di=gentae librae &c. Ut igitur reducantur quinque solidi in denarios (hoc est in duodecimas partes solidi) multiplicatur 5 in 12, erunt 60 denarii, id est sexaginta duodecimae partes solidi, quae solidis quinque aequivalent, tam sit

$\frac{60-3}{12}$

Item libra 4 in vigesimas reducta dant $\frac{80}{20}$, idest octoginta solidos, et ita de reliquis

Propositio tertia

Problema.

123 Fractiones ad integras revocare.

Resolutio

Fractio cujus numerator major est, vel aequalis denominatori, ad integra reducitur, dividendo numeratorem per denominatorem: Ut fractionis $\frac{12}{3}$ dividendo numeratorem 12 per deno=minatorem 3, inveniuntur integra 4. Similiter fractio $\frac{abm}{m}$ reducitur ad integrum ab.

Cum autem facta divisione aliquid remanet, tunc quotiens erit numerus mixtus: sic fractio $\frac{23}{4}$ dat 5 $\frac{3}{4}$, hoc est quinque integra, una cum tribus quartis partibus unius integri: verbi caussa viginti tres quartae partes argenteae librae nostratis efficiunt libras quinque, et solidos quindecim, qui tres quartas librae partes constituunt.

Propositio quarta.

Problema.

124 Maximam communem duorum numerorum mensuram invenire.

Resolutio

Dividatur major numerus per

$$\begin{array}{r|l} 667 & 203 \\ 609 & 3 \\ \hline 203 & 58 \\ 174 & 3 \\ \hline 58 & 29 \\ 58 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

minorem, et completa divisione quando nihil remanet, numerus minor erit quaesita maxima mensura. Ut numerorum 7 et 28 maxima communis mensura (§69) est 7, quia dividendo 28 per 7, obtinetur quotiens integer sine residuo, atque dividendo eosdem numeros 7 et 28 per 7 quotientes 1, et 4 (§86) sunt numeri inter se primi.

Si autem diviso majore per minorem aliquid remaneat, tunc neglecto quotiente notetur residuum et numerus minor dividatur per illud residuum. Deinde neglecto semper quotiente dividatur primum residuum per secundum, postea secundum residuum per tertium, et sic deinceps, donec tandem divisor inveniatur qui praecedens residuum exacte dividit sine ullo residuo, et divisor ultimus erit maxima communis mensura quaesita.

Sit invenienda maxima communis mensura numerorum, 203, et 667. Dividatur 667, per 203, et neglecto quotiente 03, per primum residuum 58 dividatur 203, deinde etiam neglecto quotiente 3, per secundum residuum 29 dividatur primum 58, nihil remanebit, ideoque [illegible]

Vendum erit numerum 29 esse maximam communem mensuram datorum numerorum. Si enim dividantur numeri 2. 3 . . . per 29, quotientes erunt (. . . .) erunt numeri inter se primi.

125 Tandem si post omnem divisionem ultimum residuum fuerit 1, signum erit datos numeros esse primos inter se, idest solam unitatem pro mensura communi habere.

Ut si quaeratur maxima communis mensura numerorum 17, et 58. diviso 58 per 17, neglecto quotiente 3 residuum est 7, et quod dividatur 17, et neglecto quotiente 2 residuum est 3, per quod dividatur 7 residuum erit 1, quod significat datos numeros 17, et 58, nullam habere communem mensuram praeter unitatem, consequenter (17, 58) esse numeros inter se primos. Quod erat propositum

58	17
51	4
17	7
14	2
7	3
6	2
1	

Propositio quinta.

Problema.

126 Fractiones ad minimas denominationes reducere.

Resolutio.

Primo (propositione antecedenti) inveniatur maxima communis mensura datorum numeratorum, et

denominatorem datae fractionis.
Deinde per inventam mensuram dividatur numerator, et denominator datae fractionis; quotientes constituent quaesitam fractionem minimis terminis expressam, et aequalem datae.
Ut ad reducendam fractionem $\frac{32}{48}$ ad minimos terminos, inveniatur (124) maxima communis mensura numerorum 32, et 48, quae erit 16; per quam mensuram inde dividantur numeri 32, et 48, quotientes 2, et 3 dabunt fractionem $\frac{2}{3}$ minimis terminis expressam (90), quia numeri 2, et 3 (86) sunt inter se primi. Praeterea quia numerator 32, et denominator 48, divisi fuerunt per eundem numerum 16, et quotientes 2, et 3 constituunt fractionem $\frac{2}{3}$, ideoque fractio $\frac{2}{3}$ (101), est aequalis fractioni $\frac{32}{48}$. Eodem modo fractiones $\frac{2}{20}$, $\frac{17}{34}$, $\frac{12}{32}$, $\frac{207}{667}$, reducuntur ad minimos terminos $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{29}$, et sic de reliquis.
Similiter fractio $\frac{abm}{bcm}$ reducitur ad fractionem $\frac{a}{c}$ minimis terminis expressam.

Propositio sexta

Problema

127. Fractiones ad eandem denominationem reducere.

Resolutio

Primo si fractiones ad eundem denominatorem reducendae sunt tantummodo 2 ut $\frac{a}{m}$ et $\frac{c}{x}$, tunc numeratur a, et denominator m fracti $\frac{a}{m}$ multiplicantur ambo per denominatorem x secundae fractionis $\frac{c}{x}$. Deinde numerator c et denominator x fracti $\frac{c}{x}$ multiplicantur ambo per m denominatorem primae fractionis, atque erunt quaesitae fractionis $\frac{ax}{mx}$, et $\frac{cm}{mx}$, ejusdem nominis mx, et aequales datis $\frac{a}{m}$ $\frac{c}{x}$

Demonstratio

Nam (…) est $\frac{ax}{mx} = \frac{a}{m}$, et $\frac{cm}{mx} = \frac{c}{x}$. Quod erat propositum.

Itaque duae fractiones $\frac{2}{3}$, et $\frac{4}{7}$ reducantur ad fractiones $\frac{14}{21}$, et $\frac{12}{21}$ ejusdem nominis, multiplicando 2 et 3 per 7, et multiplicando 4 et 7 per 3.

Quum vero plures sunt fractiones ad idem nomen reducendae, ut $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{a}{x}$; tunc numerator, et denominator cujusque fractionis multiplicentur ambo per productum, quod ex omnibus aliarum fractionum denominatoribus resultat, nimirum termini a, et c fracti $\frac{a}{c}$ multiplicentur per m x. termini vero b, et m fracti $\frac{b}{m}$ multiplicentur per c x, et termini a, x, fracti $\frac{a}{x}$, multiplicentur per c m, erunt

novas fractiones $\frac{amx}{cmx}$, $\frac{bcx}{cmx}$, et $\frac{acm}{cmx}$ ejusdem denominis cmx, et aequales datis.

Demonstratio

Etenim (101) est $\frac{amx}{cmx} = \frac{a}{c}$, $\frac{bcx}{cmx} = \frac{b}{m}$, et $\frac{acm}{cmx} = \frac{a}{x}$. Quod erat propositum.

Similiter datis fractionibus $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, multiplicando 2 et 3 per 5×7, idest per 35; deinde multiplicando 4, et 5 per 3×7, idest per 21; tandem multiplicando 6, et 7 per 3×5, hoc est per 15 obtinentur fractiones $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$ ejusdem nominis 105 et (101) aequales datis.

Consectarium

106. Quoniam ex datis fractionibus ejusdem nominis illa major est, quae habet majorem numeratorem ut patet; si ideo datis duabus, aut pluribus fractionibus diversi nominis, ut ipsarum maxima innotescat, reducuntur ad idem nomen, et major numerator, majorem fractionem indicabit. Sic datis fractis $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, si (105) reducantur ad idem nomen, erunt novae fractiones $\frac{56}{84}$, $\frac{63}{84}$, et $\frac{60}{84}$; quarum maxima est $\frac{63}{84}$; quia equivalet fractioni $\frac{3}{4}$; consequenter datarum fractionum $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ maxima est $\frac{3}{4}$.

Propositio septima

Problema

129 Fractionis additio

Resolutio

Si fractiones datae habent eundem denominatorem, colligantur in unam summam omnes numeratores (art. 50) atque eidem summae subscribatur datus communis denominator.

Ut fractionum $\frac{a}{m}$, $+\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{x}{m}$, summa erit $\frac{a+b+c+x}{m}$.

Similiter fractorum $\frac{4}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{11}$, summa erit $\frac{4+3+1+2}{11}$, idest $\frac{10}{11}$.

Si fractiones non habent idem nomen reducantur (122), et reliqua fiant ut antea.

Praeterea fractorum summa aliquando etiam continetur sine ulla reductione ad idem nomen, scribendo datas fractiones cum suis signis.

Ut fractorum $\frac{a}{c}$, $+\frac{b}{m}$, et $-\frac{a}{x}$ summa erit $\frac{a}{c}+\frac{b}{m}-\frac{a}{x}$, vel erit $\frac{amx+bcx-acm}{cmx}$, si reducantur ad idem nomen.

Si integra cum fractis addenda sint, reductis fractis ad idem nomen, separatim colligantur integra, et separatim fractiones, quarum summa, si (123) aliquod integrum efficiat, integrorum summae adjiciatur.

Ut numerorum $8\frac{2}{3}$, $12\frac{4}{5}$, et $9\frac{6}{7}$, hoc est reductis fractis ad idem nomen numerorum $8\frac{70}{105}$, $12\frac{84}{105}$, $9\frac{90}{105}$, summa

erit 29 $\frac{244}{105}$, idest 31 $\frac{34}{105}$, quia
fractorum summa $\frac{244}{105}$, continet (123)
duo integra una cum fracto $\frac{34}{105}$

Propositio octava

Problema

130 Fractiones subtrahere

Resolutio

Quando fractiones ejusdem sunt
nominis, subtrahatur numerator
fractionis subtrahendae ex numeratore
fractionis minuendae, et residuo
communis denominator supponatur,
ut ex fracto $\frac{16}{23}$, subtrahendo fractum
$\frac{14}{23}$, residuum erit $\frac{16-14}{23}$, hoc est
$\frac{2}{23}$

Item ex fracto $\frac{a}{m}$ subducendo fractum
$\frac{c}{m}$, residuum erit $\frac{a-c}{m}$.

Similiter ex fractione $\frac{a}{m+c}$ subtrahendo
fractum $\frac{b-c}{m+c}$, residuum erit $\frac{a-b+c}{m+c}$.

Cum vero fractiones datae non habent
idem nomen, prius reducantur (127),
et reliqua fiant ut supra.

131 Si fractio ex integro subtrahenda sit,
vel vicissim integra quantitas ex
fracto, reducatur integra quantitas
in fractum ejusdem nominis cum
data fractione, postea operemur ut
antea.

Ut ex integro 8 subtrahendo fractum
$\frac{3}{5}$, reduco (119) numerum 8 in quintas
partes, et erunt $\frac{40}{5}$; deinde subtrahendo

$\frac{2}{3}$ ex $\frac{48}{5}$, residuum erit $\frac{33}{5}$, sive ad integra reducenda (123) residuum erit [illegible].

Eodem modo ex a subtrahendo fractum $\frac{b}{m}$, reduco a in fractum (119), cujus denominator sit m, erit $\frac{am-b}{m}$. Similiter ut ex fracto $\frac{a}{c}$ subtrahatur integra quantitas b, reducatur b in fractum nominis c (119) erit $\frac{bc}{c}$, deinde facta subtractione residuum erit $\frac{a-bc}{c}$

132 Subtractio fractorum etiam obtinetur sine ulla reductione mutando signa quantitati subducendae, ut in problemate octavo libri primi. Itaque subtrahendo fractum $\frac{c-m}{x}$ ex fracto $\frac{a}{m}$ residuum erit $\frac{a}{m}-\frac{c+m}{x}$.

Propositio nona
Problema

133 Fractiones multiplicare.

Resolutio

Fractorum multiplicatio obtinetur multiplicando numeratores inter se et denominatores etiam inter se. Ut ad multiplicandum fractum $\frac{2}{4}$ per fractum $\frac{3}{4}$ ducatur quinque in 3, et 7 in 4, atque erit $\frac{15}{28}$ quaesitum productum ex fractu $\frac{5}{7}$ in fractum $\frac{3}{4}$.

Generaliter si quilibet fractus $\frac{a}{c}$ multiplicandus sit per fractum $\frac{b}{m}$ productum erit $\frac{ab}{cm}$

Demonstratio

Quoniam (44) potest significare quamlibet quantitatem, sive integram, sive fractam, sive mixtam, ideo ponamus $\frac{a}{c} = x$. Eodem modo fiat $\frac{b}{m} = z$. Deinde prima aequatio multiplicetur per c (axiomate quarto per propositione prima) habebitur alia aequatio $a = cx$ similiter aequatio $\frac{b}{m} = z$ multiplicata per m (104. 118) dat aliam aequationem $b = mz$. Postea aequatio $a = cx$ multiplicatur per aequationem $b = mz$ nimirum a per b, et cx per mz, atque (axiomate quarto) habebitur alia aequatio $ab = cxmz$; tandem aequatio haec ultima dividatur per c m, et (axiomate quinto) $\frac{ab}{cm} = \frac{cmxz}{cm}$ hoc est (68) erit $\frac{ab}{cm} = xz$; atqui hac hipotesi quantitas x exprimit valorem fractionis $\frac{a}{c}$, et z aequivalet fractionum $\frac{b}{m}$ consequenter (48) factum productum ex $\frac{a}{c}$ in fractum $\frac{b}{m}$. est autem ex demonstratis $\frac{ab}{cm} = xz$, ergo etiam $\frac{ab}{cm}$ erit productum ex fracto $\frac{a}{c}$ in fractum $\frac{b}{m}$.

Quapropter fractionum multiplicatio perficitur multiplicando numeratores inter se, et inter se

denominatores datarum fractionum,
Quod erat demonstrandum.

134 Si fractio per integram quantitatem vel integra quantitas per fractionem multiplicanda sit, tunc multiplicatur numerator datae fractionis per integram quantitatem, et producto subscribatur denominator ejusdem fractionis.

Ut Multiplicando $\frac{3}{4}$ per 2 idest per $\frac{2}{1}$ (121) productum erit $\frac{6}{4}$ per antecedentem demonstrationem.

Item multiplicando $\frac{a}{c}$ per m productum erit $\frac{am}{c}$ idem $\frac{am}{c}$

Quando vero integer cum fractione per integrum multiplicandus est tunc integer numerus multiplicatur in integrum et in fractionem.

Ut multiplicando $5\frac{3}{4}$ per 2 productum erit $10\frac{6}{4}$ per (123) reducendo fractionem ad integrum productum illud erit $11\frac{2}{4}$, sive $11\frac{1}{2}$ (126) ...

135 Quod si integer cum fractione per fractionem multiplicandus sit, tunc (124) reducatur integer in fractionem ejusdem nominis cum fractione sibi adhaerente, cui adjungatur, atque reliqua fiant ut supra.

Sic ad multiplicandum numerum mixtum $3\frac{4}{6}$ per $\frac{2}{7}$, reduco integrum 3 in sexta

partes (119) erit fractio $\frac{18}{6}$, quae addatur fracto $\frac{5}{6}$ et summa $\frac{23}{6}$ multiplicetur per $\frac{2}{7}$ productum erit $\frac{46}{42}$, quod (123) unum integrum constituit cum fracto $\frac{4}{42}$, id est $\frac{2}{21}$ (126).

Si autem integer cum fracto per integrum cum fracto multiplicandus sit, tunc (119) reducatur uterque integrorum ad fractionem ejusdem nominis cum fractione sibi adjuncta et caetera fiant, ut supra. Ut si ad multiplicandum 4 $\frac{2}{3}$ per 6 $\frac{3}{5}$, reducantur integro 4 in tertias partes, quae addantur fracto $\frac{2}{3}$, et integro 6 in quintas partes, quae jungantur fracto $\frac{3}{5}$, multiplicato $\frac{14}{3}$ per $\frac{33}{5}$, productum erit $\frac{462}{15}$, quod ad integra et ad minimos terminos reductum (123, 126) dat 30 $\frac{4}{5}$.

Propositio decima.
Problema

136. Fractiones dividere.

Resolutio

Multiplicetur decussatim, hoc est numerator fracti dividendi in denominatorem fracti divisoris, productum erit numerator quotientis et denominator fracti dividendi per numeratorem divisoris productum erit denominator quotientis.

Ut dividendo fractum $\frac{a}{b}$ per fractum $\frac{c}{m}$, quotiens erit $\frac{am}{bc}$.

Demonstratio.

Ponatur fractio dividenda $\frac{a}{b}=x$ (21), et divisor $\frac{c}{m}=z$, deinde prima aequatio $\frac{a}{b}=x$ multiplicetur per b, et (axiomate quarto, et propositione prima) habebimus alia aequatio $a=bx$, quae denuo multiplicetur per m denominatorem fracti divisoris, fiet $am=bxm$ (axiomate quarto).

Similiter secunda aequatio $\frac{c}{m}=z$ multiplicetur per m, et (107, 118), habebitur alia aequatio $c=mz$ quae multiplicata per b denominatorem fracti dividendi (axiomate quarto) producit novam aequationem $bc=bmz$. Tandem aequatio $am=bmx$ dividatur per aequationem $bc=bmz$ nimirum am per bc, et bmx per bmz, et (axiomate quinto) habebimus alia aequatio $\frac{am}{bc}=\frac{bmx}{bmz}$, hoc est (101) erit $\frac{am}{bc}=\frac{x}{z}$: sed $\frac{x}{z}$ exprimit quotientem, qui oritur dividendo quantitatem x, quae significat fractum dividendum $\frac{a}{b}$ per quantitatem z, quae significat fractum divisorem $\frac{c}{m}$, ergo etiam fractio $\frac{am}{bc}$ exprimit quotientem qui oritur dividendo fractionem $\frac{a}{b}$

per fractionem $\frac{c}{m}$, quia demonstravimus $\frac{am}{bc}=\frac{x}{z}$. Consequenter patet propositum.

Itaque dividendo fractum $\frac{6}{19}$ per fractum $\frac{3}{7}$, quotiens erit $\frac{6\times7}{19\times3}$, idest $\frac{42}{57}$.

137. Si fractio per integram quantitatem vel integra quantitas per fractum dividenda sit, tunc integro subscribatur unitas (121) ut fiat quasi fractio et caetera fiant ut antea. Sic dividendo fractum $\frac{a}{m}$ per c sive per $\frac{c}{1}$, quotiens erit $\frac{1a}{cm}$, hoc est $\frac{a}{cm}$, item dividendo fractum $\frac{3}{4}$ per 2 quotiens erit $\frac{3}{8}$ consequenter fractio per integrum dividitur multiplicando denominatorem fractionis per integrum. Similiter dividendo integrum b seu $\frac{b}{1}$ (121) per fractum $\frac{m}{c}$ quotiens erit $\frac{bc}{1m}$ sive $\frac{bc}{m}$, et dividendo integrum 6 per fractum $\frac{2}{3}$ quotiens erit $\frac{18}{2}$ hoc est 9 ad integra reducendo (123). Quapropter integra quantitas per fractum dividitur multiplicando integrum per denominatorem fracti, et producto subscribendo numeratorem datae fractionis.

138. Si integer cum fracto dividendus sit per fractum, vel per integrum cum fracto, tunc reducatur integer in fractum ejusdem nominis cum fractione sibi adhaerente, cum

qua in una summam colligatur, et
caetera fiant, ut antea.
Sit numerus mixtus $12\frac{3}{4}$ dividendus per
$\frac{5}{6}$ reducatur numerus 12 in quartas
partas (119) fiet fractio $\frac{48}{4}$, quae
jungatur cum $\frac{3}{4}$ habebitur fractus
dividendus $\frac{51}{4}$, qui dividatur per $\frac{5}{6}$,
quotus erit $\frac{306}{20}$
Item dividendo $8\frac{1}{3}$, sive $\frac{25}{3}$ per
9, quotiens erit $\frac{25}{27}$.
Similiter dividendo $8\frac{3}{5}$, idest $\frac{43}{5}$
per $7\frac{1}{2}$, hoc est per $\frac{15}{2}$, quotiens
erit $\frac{86}{75}$.

Scholium

139 In fractorum multiplicatione
productum semper minus est fractis
multiplicatoribus, quia fractum per
fractum multiplicare, est fracti mul=
=tiplicandi aliquam partem vel aliquas
partes tantum accipere.
Sic multiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$, est sumere
duas tertias partes fracti $\frac{3}{4}$, conse=
=quenter productum $\frac{6}{12}$, sive $\frac{1}{2}$ minus
est ipso fracto multiplicando $\frac{3}{4}$, ut
tres quartae partes librae nostratim
sunt solidi quindecim, et duae tertiae
partes solidorum 15 sunt solidi decem,
qui dimidium librae constituunt.
Vicissim in fractorum divisione,
quotiens major est numero divi=
=dendo, et aliquando est numerus

integeris; una enim fractio alteram bis, ter, quater, vel pluries continere potest.
Ut dividendo fractum $\frac{4}{5}$ per fractum $\frac{1}{10}$, quotiens (136) est $\frac{40}{5}$, videlicet (123), est 8, quia fractio $\frac{1}{10}$ multipli=cata per 8 producit $\frac{8}{10}$ (134), idest $\frac{4}{5}$ (126). Si enim loquamur de argentea libra nostrati, tunc $\frac{4}{5}$, idest quatuor quintae partes librae efficiunt solidos 16, et fractio $\frac{1}{10}$, seu una decima librae pars continet solidos 2. Duo autem solidi octo vices continentur in numero sexdecim, ut evidenter patet.

Arithmeticae universalis

liber tertius

De quantitatum potestatibus, et de radicum extractione.

Definitio prima

140 Productum, quod fit multiplicando quamlibet quantitatem per unitatem, aut per seipsam semel, vel bis, vel pluries, appellatur potestas, vel dignitas, vel potentia ejusdem quantitatis.

Definitio secunda

141 Prima potestas cujuslibet quanti=tatis est ipsa quantitas semel posita, seu per unitatem multiplicata; tunc 1 × a, idest a, est prima potestas quantitatis a; 1 × bm, seu bm,

est prima dignitas quantitatis b m du
similiter 7×7, scilicet 7 est prima
potestas numeri 7, et sic de reliquis.

Definitio tertia

144 Quadratum vel secunda potestas cujuslibet
quantitatis est productum, quod fit
semel multiplicando datam quantitatem
per seipsam.
Itaque numerus 81 est quadratum
numeri 9, quia producitur ex multi:
plicatione numeri 9 in numerum 9,
25 est quadratum vel secunda potestas
numeri 5, quia 5×5 producit 25.
Similiter multiplicando m in m pro:
ductum mm sive m^2 est quadratum
quantitatis m.
Item $9a^2b^6$ est quadratum quantitatis
$3ab^3$, quia multiplicando $3ab^3$ per
$3ab^3$ erit quadratum productum $9a^2b^6$.

Definitio quarta

145 Cubus seu tertia potestas cujusvis
quantitatis est productum, quod fit
multiplicando datam quantitatem
per suum quadratum.
Ut multiplicando b^2 per b productum
b^3 erit cubus sive tertia potestas
magnitudinis b.
Similiter 27 est cubus numeri 3,
quia obtinetur multiplicando 3
per suum quadratum 9.
Quod si tertia potestas, seu cubus

Cujuslibet quantitatis multiplicatur per primam potestatem, idest per eandem quantitatem, productum erit quarta potestas, sive quadratoqua:dratum ejusdem quantitatis, sic m^4 est quarta potestas quantitatis m, quia oritur ex $m^3 \times m$.

Si m^4 multiplicatur per m fiet m^5 quinta potestas ejusdem quanti:tatis m: atque ita deinceps m^6, m^7, m^8 etc. sunt sexta, septima, octava potestas, etc. ejusdem quan:titatis m.

Definitio quinta

144 Quantitas illa, hujus potestates exhi:bentur (quae etiam prima potestas appellatur) dicitur basis, aut radix earundem potestatum. Sic m dicitur radix quadrata, vel radix secunda quantitatis m^2 est radix tertia, seu cubica quantitatis m^3 est radix quarta quantitatis m^4, et sic deinceps. Similiter numerus 3 est radix quadrata numeri 9, est radix cubica seu tertia numeri 27, est radix quarta numeri 81 etc.

Definitio sexta

145 Radicis extractio est inventio illius quantitatis, hujus potestas data est. Sic extrahere radicem qua:dratam ex numero 81, et invenire

numerum g, hujus quadratum est datus numerus 81.

Similiter radicem tertiam, seu cubicam extrahere ex quantitate m^6, est invenire quantitatem m^2, cujus tertia po=testas est m^6.

Definitio septima

146 Productum quod fit multiplicando inter se duas inaequales quan=titates etiam vocatur rectangulum earundem quantitatum, et quantitates ipsae dicuntur latera ejusdem rectanguli sumta denominatione a lineis, ut videbimus in geometria plana. Sic bm productum ex b in m dicitur rectangulum contentum a quantitatibus b, et m, et quantitates b, et m apellantur latera ejusdem rectanguli.

Definitio octava

147 Quantitates commensurabiles vocantur illae, quae habent aliquam partem aliquotam (·61, ·62), seu mensuram communem, vel quarum una est pars aliquota alterius. Omnes numeri vulgares, sive integri sint, sive fracti, sive mixti sunt inter se commensurabiles, quia vel habent pro communi mensura unitatem (·63) vel aliquam unita=tis partem, et ideo dicuntur numeri

rationales. Sic integer 2, et fractus $\frac{3}{4}$
habent pro communi mensura fractum
$\frac{1}{4}$; nam fractus $\frac{1}{4}$ ter continetur
in fracto $\frac{3}{4}$, et octies continetur in
integro 2, quia (119) integer 2 redu=
=citur ad fractum $\frac{8}{4}$. Eadem ratione
integer 4, et mixtus 5 $\frac{2}{3}$ habent
pro mensura communi fractum $\frac{1}{3}$, qui
duodecies in integro 4 (119), et
septendecies vero in numero
mixto 5 $\frac{2}{3}$ continetur.
Consequenter omnes numeri
rationales sunt unitati commen=
=surabiles, quia vel ab unitate
dimetiuntur vel ab aliqua parte
aliquota unitatis. Sic 1, et $\frac{4}{5}$ habent
pro mensura fractum $\frac{1}{5}$, qui (119) con=
=tinetur quinquies in 1, et quater in
fracto $\frac{4}{5}$; atque ita de reliquis.
147. Quantitates incommensurabiles
appellantur illae, quae nullam mensu=
=ram communem habere possunt
sive sunt illae, quibus nulla inveni=
=tur unitas, cui commensurabiles
sint. Quaelibet enim mensura
una est, ideoque pro unitate
sumi potest.

Corollarium

148 Quare pro quantitatibus commensu=
=rabilibus eruntur inter se, ut unitas
ad numerum rationalem integrum,

vel, ut numerus rationalis integer ad
alium numerum rationalem integrum,
Nam aut una est pars aliquota
alterius, atque tunc si sumatur minor
pro unitate, quantitati majori respon=
=debit numerus rationalis integer,
consequenter erit minor ad majorem,
ut unitas ad numerum rationalem
integrum, sic 3a est ad 12a sicuti
1 ad 4 sumendo 3a pro unitate.
Aut datur utriusque pars aliquota
communis, et tunc si pars aliquota
communis sumatur pro unitate
utrique quantitati respondebit
numerus rationalis integer, ideoque
erunt inter se ut numerus rationalis
integer ad alium numerum rationalem
integrum, ut 6a ad 15a, est sicuti
2 ad 5, nam sumendo mensuram
communem 3a pro unitate, tunc
quantitati 6a respondebit numerus
2, et quantitati 15a respondebit
numerus 5.
Praeterea cum omnis numerus
rationalis unitati commensurabilis
sit, et incommensurabiles quanti=
=tates nullam habeant unitatem
cui commensurabiles sint, ideo
quantitates incommensurabiles
non sunt inter se, ut numerus
rationalis ad alium numerum

rationalem;

Definitio nona.

Signum quo utimur ad indicandas potestatum radices est $\sqrt{\ }$, quod radicale signum appellatur; atque cum ex quantitate sub signo radicali posita extrahi nequit radix quaesita, tunc quantitas illa dicitur quantitas irrationalis, vel surda, aut potentia imperfecta. In vertice signi radicalis ponitur numerus qui indicat radicem quaesitam, atque etiam vocatur exponens ejus potestatis, cujus radicem designat.

Ubi vero nullus est exponens in vertice signi, pro radice quadrata seu potestatis secundae accipitur. Ut $\sqrt{64}$ indicat 8, idest radicem quadratam numeri 64. Item $\sqrt{3}$ indicat radicem secundam numeri 3, quae radix numeris exprimi nequit, quia nullus numerus inveniri potest, qui per semetipsum multiplicatus producere possit numerum 3, consequenter $\sqrt{3}$ est numerus unitati incommensurabilis; at $\sqrt[3]{64}$ significat 4, idest radicem tertiam seu cubicam numeri 64. similiter $\sqrt[3]{a^3}$, significat

a, hoc est radicem tertiam seu cubi=cam quantitatis a^3.

Numeri illi, qui sunt aritmetice incommensurabiles, dicuntur numeri irrationales vel surdi; atque illi qui referuntur ad secundam potestatem, vocantur numeri irrationales primi ordinis, ut sunt $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$ &c.
Qui vero ad tertiam potestatem appellantur numeri irrationales secundi ordinis, et sunt $\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{5}$ &c.

Problema primum

130 Cujusvis datae quantitatis quadratum cubum, et alias omnes potestates invenire.

Resolutio

Ut inveniatur quadratum multiplicetur data quantitas per se ipsam, et productum (142) erit quaesitum quadratum, sive secunda potestas datae quantitatis.
Itaque quadratum quantitatis b erit $b \times b$, idest bb, sive b^2.
Quadratum quantitatis am erit $am \times am$ idest a^2m^2. Et quadratum quantitatis a^3 erit $a^3 \times a^3$ hoc est a^3a^3 sive a^{3+3}.
Quadratum quantitatis $7a^3b^2m$ erit $7a^3b^2m \times 7a^3b^2m$, idest

$49\, a^6 b^4 m^2$

Similiter multiplicando $a+b$ per $a+b$, productum $a^2+2ab+b^2$ erit quadratum ejusdem quantitatis $a+b$. Eadem ratione quadratum fractionis $\frac{a}{c}$ erit $\frac{a}{c} \times \frac{a}{c}$, hoc est $\frac{a^2}{c^2}$, atque ita de reliquis.

151 Si autem quaeratur cubus seu tertia potestas datae quantitatis, tunc per antecedentem numerum inuento quadrato ejusdem quantitatis, multiplicetur eadem quantitas per suum quadratum.

Igitur cubus quantitatis b erit $b \times b^2$ idest b^3, cubus quantitatis am erit $a^2 m^2 \times am$, nimirum $a^3 m^3$ cubus quantitatis $7a^3 b^2 m$ erit $49 a^6 b^4 m^2 \times 7a^3 b^2 m$, idest $343\, a^9 b^6 m^3$, et cubus quantitatis $-a$ erit $-a^3$, quia $-a \times -a$ dat $+aa$, et $+aa \times -a$ producunt $-a^3$.

Similiter si $a^2+2ab+b^2$ (quadratum quantitatis $a+b$) multiplicetur per $a+b$ productum $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ erit tertia potestas quantitatis $a+b$. Item cubus fract. $\frac{a}{c}$ erit $\frac{a^2}{c^2} \times \frac{a}{c}$, idest $\frac{a^3}{c^3}$.

152 Quod si tertia potestas iterum multiplicatur per datam quantitatem in producto habebitur quarta potestas. et multiplicando quartam

potestatem per primam, idest per datam quantitatem habebitur quinta potestas ejusdem quantitatis, atque ita deinceps.
Quapropter multiplicando 2 in 2 fit 4, quadratum numeri binarii; 2 in 4 producit 8 cubum numeri 2, et 2 in 8 producit 16, idest quartam potestatem numeri 2; et 2 in 16 producit 32, scilicet quintam potestatem numeri 2, et 2 in 32 producit 64, qui numerus 64 est sexta potestas ejusdem numeri 2; atque ita progrediendo reliquae potestates inveniuntur.

Corrolarium primum

153 Quapropter ut obtineatur reliqua potestas cujusvis simplicis quantitatis literis expressae, et positivae, satis erit exponentes ejusdem quantitatis multiplicare per numerum quaesitae potestatis. exempli causa, ad obtinendam secundam potestatem quantitatis $ab^2c^3m^6$ multiplicantur per 2 exponentes 1, 2, 3, 6, et erit $a^2b^4c^6m^{12}$ quaesitum quadratum. Nam juxta regulam praecedentis numeri 150 multiplicando $ab^2c^3m^6$ per $ab^2c^3m^6$ idem productum, seu quadratum $a^2b^4c^6m^{12}$ obtinetur.

Similiter tertia potestas quantitatis $a b^4 c^2$ obtinetur triplicando exponentes 1, 4, 2, atque erit $a^3 b^{12} c^6$ cubus ejusdem quantitatis. Eadem ratione ad obtinendam quartam potestatem multiplicantur exponentes per 4 ad inveniendam quintam potestatem multiplicantur per 5, atque ita deinceps.

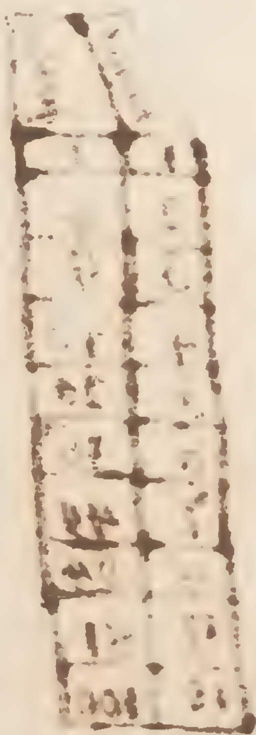
Quod si data fuerit quantitas negativa, tunc potestates pares ejusdem quantitatis, hoc est secunda potestas, quarta, sexta, octava &c. positivae erunt. Potestates vero impares, idest tertia, quinta, septima, &c; (56, 56) erunt negativae.

Numeri vero coefficientes semper multiplicandi sunt inter se juxta regulas superius traditas. Sic tertia potestas quantitatis $4a^2b^7$ erit $4 \times 4 \times 4$ $a^6 b^{21}$, idest 64 $a^6 b^{21}$ (151)

Corrolarium secundum

54. Ergo nullum dari potest quadratum negativum; nam vel positiva quantitas in positivam, vel negativa per se met ipsam, idest per negativam multiplicatur, et productum semper esse positivum (44)

Hinc radix quadrati quantitatis



negativa dicitur radix imaginaria.
Sic $\sqrt{-aa}$ $\sqrt{-m}$ et $\sqrt{-5}$ sunt radices imaginariae.

Scholium.

155 Quantitates compositae etiam ad quamlibet potentatem elevantur scribendo ad earum dexteram exponentem quaesitae potestatis ducta desuper linea.

Sic $\overline{a+b}^2$ significat quadratum quantitatis $a+b$, idest $a^2+2ab+b^2$.

Item $\overline{a+b}^3$ significat quantitatem $a+b$ elevatam esse ad cubum, seu tertiam potestatem.

Problema secundum

156 Ex dato numero radicem quadratam extrahere.

Quando datus numerus est quadratus, et non excedit numerum centum, ejus radix quadrata habetur in sequenti tabella, cujus prima columna sinistrorsum radices continet, altera vero dextrorsum positos earundem radicum quadrata.

radices	quadrata
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Ex hac igitur tabella evidens est radicem quadratam numeri 49 esse 7, radicem quadratam numeri 16 esse 4, et sic de caeteris.

157 Quum vero datus numerus, minor

centenario quadratus non est, tunc sumatur radix maximi quadrati in dato numero contenti.

Sic radix quadrata numeri 28 inveniri nequit, quia nullus numerus in se ipsum ductus producere potest numerum 28; sed radix quadrata proxime minor numeri 28 est 5, quia ejus quadratum 25 est maximum quadratum contentum in dato numero 28.

Similiter radix proxime minor numeri 99 est 9, quia ejus quadratum 81 est maximum quadratum contentum in dato numero 99.

158 Si datus numerus major est numero centeno ejus radix quadrata, sequenti methodo inveniatur.

Primo dividatur datus numerus in membra puncto secernendo binas quasque figuras, incipiendo a dextera, et procedendo versus versus sinistram si figurarum numerus sit par, quodlibet membrum duas continebit notas. Quum vero numerus figurarum est impar, primum membrum ad sinistram positum unam tantum habebit notam.

Praeterea quot erunt membra totidem notas habebit radix.

A

29.48.49
25
44
29.16
324
294849
0

B: 543

C: 10

D: 108

Hisce praesupositis operetur ut in sequenti exemplo.

Datus sit numerus A, idest 294849, cujus radix quadrata invenienda sit. Diviso dato numero in membra, ut dictum est ante, quaeratur in superiori tabula radix quadrata primi membri 29 ad sinistram positi. Quia vero numerus 29 non est quadratus, quaeratur radix proxime minor (157), quae est 5, atque dextrorsum ponatur in B, interjecta lineola inter numeros A et B. Postea multiplicetur radix 5 in se metipsam, et quadratum 25 scribatur sub ipso membro 29, a quo subtrahatur, residuum erit 4, cui dextrorsum adjungatur prima nota 4 secundi membri 48 fiet numerus 44; Deinde radix inventa 5 duplicetur fiet divisor 10, qui scribatur in C, et dividatur 44 per 10, quotiens erit 4, qui ponatur pro secunda radicis nota in B ad dexteram notae 5, et habebitur 54, multiplicetur numerus inventus 54 per semetipsum; inveniatur nempe quadratum numeri 54, quod erit 2916, et scribatur infra numerum 44, directe, et ordinatim sub figuris 2948, quae sinistrorsum duo priora membra numeri A constituunt,

atque subtrahatur quadratum 2916 ex numero 2948, residuum erit 32, cui dexterorum descendatur prima nota 4 tertii membri 49, erit membrum dividendum 324.
Postea duplicetur tota radix jam inventa 54, et ejus duplum 108 ponatur in D, erit alius divisor, per quem dividatur numerus 324, quotiens erit 3, qui scribatur in B post 54 idest pro tertia radicis nota. Tandem fiat quadratum totius radicis inventa 543, quod erit 294849, et subtrahatur ex tribus integris membris, idest ex integro numero A, residuum erit 0, ideoque datus numerus A est quadratus, et ejus radix quadrata est numerus 543, quia numerus 543 in se ipsum ductus restituit numerum datum A

139 Si in progressu operationis quadratum jam inventa radicis excedit numerum ex quo subtrahi debet, tunc ultima radicis nota per divisionem inventam unitate minuatur, ut videre est in sequenti exemplo.

E	F	G
3.24	18	2
1		
22		
324		
0		

Quaeratur radix quadrata numeri B, idest 324, dividatur in membra ~~per~~ cuncta modo jam explicato. Primum membrum sinostrorum erit 3, cujus radix quadrata proxime minor

est 1, quae ponatur in F, ejusque quadratum 1 subtrahatur ex eodem membro 3, residuum erit 2, cui dextrorsum addatur prima nota 2 sequentis membri 24 fiet numerus 22, qui dividatur per duplum inventae radicis 1, idest per divisorem 2, positum in G, seu 2 in 22 novies continetur (quod autem pluries contineatur, nihil refert, quia nulla nota ponitur in quotiente, seu radice major quam 9) unde quotiens 9 scribendus esset in F pro secunda radicis figura, et quadratum radicis 19, idest numerus 361, subtrahendus esset ex numero 324, quod fieri nequit, proindeque quotiens 9 unitate minuatur, idest ponatur 8 pro secunda radicis nota, et multiplicando radicem inventam 18 per remetipsam, obtinetur ejus quadratum 324, quo subtracto ex numero dato 324, nihil remanet, ergo numerus 18 est radix quadrata numeri 324

160 Cum vero inventus divisor non continetur in membro dividendo, tunc apponitur in radice cifra 0, et divisori adjungitur alia cifra 0. Membro autem dividendo dextrorsum addantur duae subsequentes notae numeri dati.

Extrahenda sit radix quadrata

A	M
4.32.64	208
4	G
0 326	40
43264	
0	

ex numero 43264, qui vocetur A, et dividatur in periodos ut dictum fuit numero 136. Primum membrum sinistrorsum erit 4, cujus radix quadrata 2 ponatur in M, et quadratum hujus radicis 2, idest 4 subtrahatur ex membro 4 numeri A, residuum erit 0, cui dextrorsum adjungatur prima nota 3 secundi membri 32, fiet 03, idest 3. Duplicetur radix inventa 2, et ejus duplum 4, ponatur in G, et dividatur 3 per 4; quia vero 4 in 3 non continetur, scribatur 0 in M post notam 2; item ponatur 0 in G post notam 4 habebitur radix 20 in M, et ejus duplum 40 in G erit divisor, deinde ad dexterum numeri 03 descendatur secunda figura 2, secundi membri ~~notam~~ 32 ~~primi membri~~, et prima notam 6 tertii membri 64 erit membrum dividendum 326 per divisorem 40 positum in G dividatur numerus 326, quotiens erit 8, qui ponatur in M pro tertia radicis nota. Tandem fiat quadratum radicis 208, quod erit 43264, quo subtracto ex numero A, residuum erit 0; consequenter numerus M est radix quadrata

numeri A

161 Si post ultimam subtractionem aliquid remanet, signum est datum numerum non esse revera quadratum, neque habere radicem rationalem. At radix illa indicatur ponendo datum numerum sub signo radicali (149). Radix vero in operatione inventa, erit radix proxime minor ejusdem numeri, sive radix maximi quadrati in eodem numero contenti.

Quamvis autem vera radix inveniri nequeat, quando datus numerus non est quadratus, potest tamen ad veram radicem magis, magisque approximari, ita ut differentia a vera radice sit minima, quod sequenti ratione obtinetur.

162 Dato numero non quadrato aliquot cifrarum paria addantur, idest vel duo, vel quatuor, vel sex &c., et ex dato numero una cum praedictis cifris extrahatur radix quadrata, ut in antecedentibus exemplis. Postea ex inventa radice totidem notae auferantur dextrorsum, quot cifrarum paria addita fuerint; reliquae notae radicis sinistrorsum positae exhibebunt radicem integram proxime minorem; figurae dextrorsum resectae ponantur supra lineam

1,50,0,00		└387
9		$3\frac{87}{100}$
60	└6	
1444		
560	└76	
149769		
231		

pro numeratore fractionis, et pro deno=
minatore scribatur unitas cum totcifris,
quot paria addita fuerunt, et integer
prædictus cum fractione supradicta
indicabunt radicem proximiorem
numeri dati.
Extrahenda sit radix quadrata
ex numero 15, cujus radix proxime
minor est 3 (151): cum residuo
6; ut inveniatur radix proximior,
eidem numero 15 addantur aliquot
cifrarum paria exti caussa duo,
fiet numerus 150000, ex quo extra=
=hatur radix quadrata juxta regulas
superius traditas, et invenietur
387, radix proxime minor numeri
150000 cum residuo 231: atque
ob duo cifrarum paria addita separ=
=nantur ex ea radice 387, duæ
notæ dextrorsum, nempe 87, et
numero 87 pro denominatore
subscribatur 1 cum duabus cifris,
atque erit $3\frac{87}{100}$, radix proximior
vera quidem minor, sed propinquior,
et exactior, quam radix 3 primo
inventa: hæc enim radix $3\frac{87}{100}$
neque una centesima unitatis
parte a vera radice differt: si tria,
vel quatuor, vel plura cifrarum
paria addita fuissent, tunc radix
magis magisque veræ radici

radices	cubi
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000

propinquior esset

Problema tertium

163 Ex dato numero radicem cubicam extrahere.

Quando datus numerus est cubus, et non excedit numerum 1000, tunc ejus radix habetur in sequenti tabula. Item evidens est radicem tertiam, seu cubicam numeri 216 esse 6. Vicissim patet cubum numeri 9 esse 729, et sic de reliquis.

164 Si datus numerus minor numero millenario, non est cubus, tunc sumatur radix proxime minor hoc radix maximi cubi in dato numero contenti, ut radix cubica proxime minor numeri 124 est 4, quia ejus cubus 64 est maximus cubus contentus in eodem numero 124.

165 Quando datus numerus excedit numerum mille, tunc sequenti methodo extrahatur radix.

Invenienda sit radix tertia numeri 79507, qui vocetur A dividatur datus numerus in membra, dextrorsum incipiendo ita ut singula membra tres contineant notas excepto ~~primo~~ primo membro sinistrorsum, quod aliquando unam tantum vel duas habebit notas, ut in hoc exemplo apparet

A

79.507 | R 43

64 | D 48

155

79507

0

Praeterea quot erunt membra totidem erunt notae in quaesita radice.

Quaeratur in antecedenti tabula radix tertia primi membri ad sinistram positi, sed in dato numero A primum membrum 79 non est numerus cubus, ideoque accipiatur radix cubi 64 proxime minoris, quae est 4, et ponatur in R. Hujus radicis 4. cubus 64 subducatur ex primo membro 79, residuum erit 15, cui dextrorsum adjungatur prima sequentis membri nota 5, fiet 155 membrum dividendum.

Deinde inveniatur quadratum 16 inventae radicis 4. et per ejus triplum 3 X 16, et per 48, qui ponatur in D dividatur membrum dividendum 155, quotiens 3 erit altera radicis nota, quae ponatur in R. Radicis 43 fiat cubus (131) 79507, qui subtrahatur ex utroque membro, idest ex integro numero dato A cumque nihil supersit signum erit numerum 43 esse radicem cubicam dati numeri A.

166 Quando cubus jam inventae radicis excedit numerum, ex quo subtrahendus est, tunc unitate minuatur ultima radicis nota, ut videre est

in sequenti exemplo
Extrahenda sit radix tertia ex numero A, idest 155720672 qui dividatur in membra, ut antea discimus.
Primum membrum sinistrorsum erit 155, cujus radix cubica proxime minor (164), est 5, quae dextrorsum ponatur in R, et ejus cubus 125, subtrahatur ex primo membro 155, residuum erit 30, cui adjungatur prima nota 7 sequentis membri, fiet 307, qui dividatur per 25X3 idest per 75, triplum quadratum radicis 5, quotiens 4 ponendus esset in R pro secunda radicis nota et haberetur radix 54, cujus cubus 157464, subtrahendus esset a duobus primis membris numeri A, scilicet ex numero 155720, quod fieri nequit. Proindeque quotiens 4 unitate minuatur, et ponatur 3 in radice post notam 5, fiet 53, cujus tertia potestas, seu cubus 148877 subducatur a praedicto numero 155720, residuum erit, 6843, cui dextrorsum adjungatur sequens nota 6 tertii membri, habebitur numerus 68436, qui divisus per numerum C, idest per triplum quadratum radicis

inventa 53, quod est 5427, dat quotientem 8, qui ponatur in R, deinde fiat cubus totius radicis 538, qui erit 155720872 et subtrahatur ex numero A, residuum erit 0, consequenter inventus numerus R, et radix cubica fracti numeri A

167 Si divisor inventus non continetur in membro dividendo, tunc ponitur cifra 0 in radice, et totius inventae radicis cubus subtrahitur, ut supra. Residuo autem semper adjungatur prima nota sequentis membri, et numerus, qui oritur, dividatur per triplum quadratum totius jam inventae radicis.

8998912	208
8	
09	
8000	
9989	1200
8998912	
0	
A	

Ut in apposito exemplo, quia 12 triplum quadratum jam inventae radicis 2 non continetur in membro dividendo 9, ponitur 0 in radice post jam inventam notam 2, postea cubus radicis 20, idest 8000, subtrahitur ex duobus prioribus membris dati numeri idest ex numero 8998, et residuo 998 dextrorsum additur prima nota 9 sequentis membri 912, et fit numerus 9989, qui dividitur per 1200 triplum quadratum jam inventae radicis

20, et reliqua fiunt ut in antecedentibus exemplis.

168 Quando ex dato numero radix prædicto modo extrahit, signum est datum numerum non esse cubum, nec habere radicem cubicam, quæ numeris rationalibus exprimi possit.

Propinquior autem radix, quæ a vera radice similiter differat invenitur, addendo aliquos cifrarum ternarios ad ipsum numerum datum, et ex eodem numero cum prædictis cifris extrahendo radicem cubicam ut in antecedentibus exemplis, Deinde ab inventa totidem dextrorum secentur notæ, quot cifrarum ternarii adjecti fuere, reliquæ notæ sinistrorum dabunt radicem integram proxime minorem, atque eadem radix integra una cum fractione cujus numerator sint ipsæ rejectæ notæ, et denominator sit unitas cum tot cifris, quot cifrarum ternarii additi fuerunt, erit radix proximior.

Sic numero 12 qui cubus non est, adjunctis duobus cifrarum ternarii fit numerus 12000000, cujus radix tertia proxime minor est 228, ex qua sectis duabus figuris, ob duos cifrarum ternarios,

12000000 $\lfloor 2\frac{28}{100}$
8
40
10648 $\lfloor 12$
13520 $\lfloor 1452$
11852352
147648

quibus subscribatur unitas cum duabus cifris, erit $2\frac{28}{100}$ radix propinquior, quae non differt una centesima unitatis parte a vera radice. Si tres, aut plures addantur cifrarum ternarii radix semper verae radici proximior invenietur.

Problema quartum

169 Radicem quadratam ex algebraicis quantitatibus extrahere

Resolutio.

Si datae quantitates sunt simplices extrahitur radix quadrata dividendo per numerum binarium omnes exponentes ejusdem quantitatis, ut quantitatis a^2 radix est a^1, seu a, quia $a \times a$ restituit a^2. Item quantitatum $a^4, b^8\, c^6$. Radices quadratae erunt $a^2\, b^4\, c^3$.

Similiter radix quadrata potestatis a^7, est $a^{\frac{7}{2}}$, et quantitatis b^5 est $b^{\frac{5}{2}}$, est radix quadrata quantitatis $a^3\, b^2\, c^4$ erit $a^{\frac{3}{2}}\, b\, c^2$.

170 Si data quantitas habet numerum coefficientem in primis extrahitur radix ex numero coefficiente juxta regulas traditas in problemate secundo, postea ex quantitatibus litteralibus juxta praecedentem numerum.

Ut radix quadrata quantitatis $81\,a^2 b^6$ est $9a\,b^3$, quia $9a\,b^3 \times 9a\,b^3$ restituit $81\,a^2 b^6$.
~~Similiter~~ radix quadrata quantitatis $324\,a^8 b^4$ est $18\,a^4 b^2$.

171 Signum vero radici quadratae praeponendum potest esse negativum, vel ~~positivum~~, nam exempli gratia quadratum a^2 (170) ~~obtinetur~~, tam ex multiplicatione quantitatis $+a$ in $+a$, quam multiplicando $-a$ in $-a$; ideoque quadratum a^2 indicas habet radicem unam positivam $+a$, et alteram negativam $-a$. Idem de reliquis quadratis intelligatur.

172 Quod si data quantitas fuerit composita ut $a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2$ ut ex aliquo termino, qui sit perfecte quadratus, ut ex a^2 extrahatur radix quadrata, quae (169) erit a atque ponatur deorsum interjecta lineola, deinde per duplum inventae radicis, idest per $2a$ dividantur omnes termini datae quantitatis, qui dividi possunt in integris, dividantur nempe termini $+2ab$, et $-2ac$ per $2a$, et quotientes $+b-c$ ponantur in radice post jam inventum terminum a, atque erit $a+b-c$ radix quaesita, nam fiat quadratum inventae radicis $a+b-c$, et subtrahatur

est data quantitate, nihil remane:
:bit; consequenter $a+b-c$ est
radix quadrata datæ quantitatis.
173 Si post subtractionem aliquid re:
:manet, signum est datam
quantitatem non esse quadratum.
Præterea radix quadrata cujuslibet
quantitatis exprimitur (149) scribendo
eandem quantitatem sub signo
radicali, sic $\sqrt{64}$ significat 8, et
$\sqrt{a^2}$ significat a. Similiter $\sqrt{15}$
significat radicem secundam
numeri 15 $\sqrt{ab-cm}$ significat
radicem quadratam quantitatis
$ab-cm$. Atque hac ratione
extrahitur radix quadrata
ex qualibet quantitate, quæ
non sit perfectum quadratum.

Corrolarium

174 Quapropter ut habeatur quadratum
cujusvis quantitatis positæ sub
signo radicali, satis est ipsam
quantitatem ponere extra signum;
ut quadratum quantitatis $\sqrt{25}$
est 25. nam ex dictis $\sqrt{25}$
significat 5, et quadratum numeri
5 est 25; ergo $\sqrt{25}\times\sqrt{25}$
producit 25. Eadem ratione
$\sqrt{15}\times\sqrt{15}$ producit 15.
Similiter $\sqrt{a-b}\times\sqrt{a-b}$ dat
productum $a-b$

175 Problema quintum

Radicem cubicam ex algebraicis quantitatibus extrahere.

Ex quantitatibus simplicibus radix cubica seu tertia extrahitur dividendo per numerum 3 omnes exponentes datarum quantitatum, ideoque radix tertia quantitatis a^3, erit a, quia $a \times a \times a$ restituit a^3.

Item quantitatum $a^6 b^9$, c^{12} radices cubicae erunt $a^2 b^3$, c^4.

Similiter quantitatis b^2 radix tertia est $b^{\frac{2}{3}}$, quia $b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}}$ producit $b^{\frac{6}{3}}$, restituit nempe b^2 (64).

176 Quam vero habent numeros coefficientes, tunc prius extrahatur radix tertia ex numeris coefficientibus juxta regulas traditas in praecedenti problemate tertio.

Itaque quantitatis $8 a^6 b^3$ radix cubica erit $2 a^2 b$.

Item radix tertia quantitatis $125 a^{12} b^3 c^6$ erit $5 a^4 b c^2$

177 Quod si data quantitas sit composita ut $a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$, tunc extrahatur radix cubica ex aliquo termino, qui sit perfecte cubus, ut ex a^3, et ejus radix a deorsorum ponatur erit primus radicis terminus. Postea per triplum quadratum

inveniatur radicis et dividantur omnes termini divisibiles, nimirum in hoc exemplo per $3a^2$ dividatur terminus $-3a^2b$, et quotiens $-b$ ponatur in radice post terminum a, fiat cubus totius radicis $a-b$ erit $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, quo subtracto ex data quantitate nihil remanet, ideoque $a-b$ est radix tertia datae quantitatis.

178 Si ex data quantitate radix tertia praedicta ratione extrahi nequit ponatur data quantitas sub signo radicali (149), supra quo scribatur numerus 3

Sic $\sqrt[3]{a^4-bc}$ significat radicem tertiam quantitatis a^4-bc.

Similiter $\sqrt[3]{8a^3}$ significat $2a$, idest radicem cubicam quantitatis $8a^3$.

Item $\sqrt[3]{512}$ significat 8; quod de aliis quibuscumque magnitudinibus intelligatur

Corrolarium

179 Hinc sequitur cubum cujusvis quantitatis sub signo radicali positae obtineri scribendo eamdem quantitatem extra signum. Ut cubus quantitatis $\sqrt[3]{64}$ est 64, nam $\sqrt[3]{64}$ significat 4, et cubus numeri 4 est 64, ergo cubus quantitatis $\sqrt[3]{64}$ erit etiam 64

Similiter cubus quantitatis $\sqrt[3]{abc}$ est abc atque ita de reliquis

Scholium

160 Si ex data fractione extrahenda sit radix quadrata vel cubica tum extrahatur quaesita radix tam ex numeratore, quam ex denominatore ejusdem fractionis. Ut radix quadrata fractionis $\frac{25}{64}$ est $\frac{5}{8}$: radix cubica fractionis $\frac{8}{27}$ erit $\frac{2}{3}$; Similiter radix quadrata fractionis $\frac{a^6}{b^2}$ erit $\frac{a^3}{b}$, et radix cubica fractionis $\frac{c^{12}}{m^3}$ erit $\frac{c^4}{m}$, at quantitatis $\frac{c}{m}$ radix quadrata erit $\sqrt{\frac{c}{m}}$, vel erit $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{m}}$. Item radix cubica fractionis $\frac{a}{c}$ erit $\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$, vel erit $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{c}}$, et sic de caeteris

161 Praeterea radix quadrata cujusvis fractionis invenitur multiplicando numeratorem per denominatorem et ex producto extrahendo radicem quadratam, cui subscribatur denominator datae fractionis. Ut ad inveniendam radicem quadratam fracti $\frac{3}{12}$ multiplicetur 3 in 12 et ex producto 36 extrahatur radix secunda, quae erit 6, cui subscribatur denominator 12, erit $\frac{6}{12}$, idest $\frac{1}{2}$ radix quaesita.

Propositio

Theorema

182 Radices aequales aequalia quadrata aequales cubos &c. constituunt. Vicissim aequalia quadrata, aequales cubi &c. habent radices aequales.

Demonstratio

Primo sit $a = c$ idest $a^1 = c^1$, multiplicando exponentes aequales 1 et 1 per 2 vel per 3, vel per 4 &c. (axiomate quarto) erit $a^2 = c^2$, vel $a^3 = c^3$, vel $a^4 = c^4$ = vel $a^5 = c^5$ &c.; quia multiplicare exponentes per 2 idem est ac multiplicare aequales quantitates a et c per aequales a, et c, et ita de reliquis: consequenter potestates aequales radicum aequalium sunt etiam aequales, et vice versa.

Secundo sit $a^2 = m^2$, dividendo exponentes per eandem quantitatem 2 (axiomate quinto) quotientes erunt aequales, erit nempe $a^1 = m^1$ sive $a = m$. Similiter, si fuerit $a^3 = m^3$ dividendo exponentes per 3, erit $a = m$, ut patet. Ergo aequalia quadrata, aequales cubi &c. habent etiam radices aequales. quod erat demonstrandum

Elementorum

Geometriae

Liber primus

De quantitatum rationibus, et proportionibus.

Definitio prima

Ratio geometrica (Aritmeticas numero 94) dicitur rationalis, quando ejus antecedens (Aritm: n. 96) est ad suum consequentem ut unitas ad numerum rationalem vel, ut numerus rationalis ad alium numerum rationalem.

Ut ratio 2a : 6a, quae est sicuti 1 : 3, quia antecedens 2a est tertia pars consequentis 6a est ratio ratio=nalis.

Similiter ratio 5m : 3m est rationalis quia antecedens 5m est ad consequen=tem 3m, sicuti numerus rationalis 5 ad numerum rationalem 3. Ratio vero geometrica quae numeris rationalibus exprimi nequit, irra=tionalis vocatur.

Sic ratio $1 : \sqrt{2}$ est irrationalis, quia (Aritm: num. 149) radix numeri 2 rationali numero exprimi non potest.

Definitio secunda

Geometrica ratio sive rationalis sit, sive irrationalis, apellatur ratio aequalitatis, quando antecedens aequalis est consequenti, ut sunt rationes $a : a$ $m : m$ $\sqrt{a} : \sqrt{a}$,

$\sqrt{2} : \sqrt{2}$ &c.
Cum vero antecedens non est
aequalis consequenti, vocatur ratio
inaequalitatis, ut 6 : 2, vel 3 : 12,
vel a : b.

Definitio tertia.

Ratio geometrica rationis inaequali-
tatis est illa, cujus antecedens
major est consequente, ut 6 : 2,
vel 12 : 8.
Quando antecedens minor est conse-
quente, tunc dicitur ratio minoris
inaequalitatis, ut 2 : 6, vel 4 : 12.

Definitio quarta.

Rationalis ratio majoris inaequalitatis.
Primo dicitur multiplex, quando
ejus exponens, seu valor (Arit: 97)
est numerus integer, ut ratio 6 : 2
cujus exponens est $\frac{6}{2}$, scilicet 3.
Secundo vocatur superparticularis
si ejus exponens est unitas cum
fractione (ad minimos terminos re-
ducta) habente unitatem pro
numeratore. Ut ratio 6 : 4, cujus
exponens est $\frac{6}{4}$, idest $1\frac{1}{2}$ (Arit: n: 123)
Tertio appellatur superpartiens,
quando ejus valor seu exponens
est unitas cum fractione, quae
(Arit: n: 126) ad minimos termi-
nos reducta, non habeat pro
numeratore unitatem, sed aliquam

numerum integrum: ut ratio 7:5; cujus exponens est $\frac{7}{5}$, sive $1\frac{2}{5}$.
Quarto praeterea dicitur ratio multiplex superparticularis illa, cujus exponens est numerus integer cum fractione, quae ad minimos terminos reducta, habeat unitatem pro numeratore, ut ratio 7:3, cujus exponens est $\frac{7}{3}$, sive $2\frac{1}{3}$.
Quinto tandem vocatur ratio multiplex superpartiens, si ejus exponens est numerus integer cum fractione (ad minimos terminos reducta) cujus numerator sit aliquis numerus integer, ut ratio 15:4, cujus exponens $\frac{15}{4}$ est $3\frac{3}{4}$.
Totidem quoque sunt genera rationum rationalium minoris inaequalitatis, videlicet submultiplex subsuperparticularis, sub superpartiens submultiplex subsuperparticularis, et submultiplex subsuperpartiens, quae correspondent rationibus majoris inaequalitatis.
Supradicta vero rationum genera, sive majoris, sive minoris inaequalitatis in indefinitas species dividuntur: nam exempli gratia ratio multiplex vel est dupla, ut 10:5 vel tripla ut 6:2, vel quadrupla, vel quincupla &c: Ratio

superparticularis: vel est sesquialtera
cujus antecedens semel cum dimidio
continet consequentem ut 3: 2, vel
est sesquitertia cujus antecedens semel
cum triente consequentem continet
ut ratio 4: 3; vel est sesquiquarta
ut 5: 4 &c:
Similiter ratio submultiplex vel est
subdupla, ut 6: 12 vel subtripla ut
2: 6, vel sub quadrupla &c:
Item ratio subsuperparticularis
vel est subsesquialtera, cujus antecedens
semel cum dimidio continetur in
consequente: ut ratio 2: 3, vel est
sub sesquitertia ut 3: 4 &c:

Definitio quinta

Data qualibet ratione geometrica,
si ejus consequens ad antecedentem
terminum referatur fiet item alia
ratio quae dicitur ratio inversa vel
reciproca datae rationis, ut data
ratione 6: 2 ejus ratio inversa
erit 2: 6. Item ratio m: a est
reciproca rationis a: m, atque
e converso ratio a: m, est reciproca
rationis m: a.

Corollarium

Ergo ratio inversa cujusvis
rationis majoris inaequalitatis
erit ratio minoris inaequalitatis,
vicissim ratio inversa rationis

minoris inaequalitatis erit ratio
majoris inaequalitatis.
Sic rationis quadruplae 12:3 reciproca
seu inversa, erit ratio subquadrupla
3:12 similiter rationis subduplae
4:8 ratio inversa erit ratio dupla
8:4.

Definitio sexta

Ratio composita dicitur illa, cujus
exponens seu valor, est aequalis
producto exponentium aliarum
rationum. Sic ratio 24:3 dicitur
composita ex duabus rationibus
20:5, et 12:6, quia (cum sint) ejus
exponens $\frac{24}{6}$ scilicet 8 sit aequalis
producto ex numero 4 (qui est
exponens rationis 20:5) in numerum
2 qui est exponens rationis 12:6.
Similiter ratio acm:a dicitur
composita ex rationibus bc:b,
et bm:b, quia ejus exponens $\frac{acm}{a}$
idest cm (scilicet 6.8) adaequat
productum ex quantitate c (exponente
rationis bc:b) in quantitatem
m, exponentem rationis bm:b.
Eodem modo ratio abcm:ab
dicitur composita ex rationibus
ac:a et bm:b, quia ejus
exponens cm adaequat productum
ex exponente c
rationis ac:a, in exponentem m

rationis bm: b, et sic de caeteris.

Corrolarium primum

Nulla igitur ratio geometrica in se spectata seu absolute dicitur composita, nisi ad alias referatur, et ejus exponens adaequet productum ex aliarum rationum exponentibus.

Corrolarium secundum

Praeterea rationes compositae ex rationibus, quarum singulae singulis aequales sint inter se, pariter aequales erunt, quia aequales rationes (ant: n: 99.) habent exponentes aequales, et multiplicando exponentes aequales per alios aequales expo:nentes (axio: 4.) producta fiunt aequalia.

Corrolarium tertium

Quapropter ratio illa, cujus ante:cedens est productum ex anteceden:tibus aliarum rationum, et conse:quens est productum ex conse:quentibus earundem rationum erit composita ex iisdem rationibus. Ut datis rationibus a:b, c:m r:x, si antecedentes a, c, r multi:plicentur inter se, et consequentes b, m, x pariter inter se multipli:centur habebitur ratio acr: bmx ex aliis datis composita, quia ejus exponens (ant: 97.) est $\frac{acr}{bmx}$

et adæquat productum, quod fit multiplicando inter se exponentes $\frac{a}{b}; \frac{c}{m}; \frac{r}{x}$ aliarum rationum, etenim (art: n 133) est $\frac{a}{b} \times \frac{c}{m} \times \frac{r}{x} = \frac{acr}{bmx}$.

Corrolarium quartum

Si autem datis duabus rationibus, multiplicatur antecedens primæ per consequentem secundæ, et productum ponatur pro antecedente tertiæ rationis; deinde productum ex consequente primæ in antecedentem secundæ rationis ponatur pro consequente tertiæ rationis; tunc nova ratio erit composita ex prima directe, et reciproca ex secunda. Sint rationes $a:b$, et $c:m$, atque multiplicentur a in m, et b: in c ratio $am:bc$ composita erit ex directa ratione $a:b$ et ex reciproca $c:m$, quæ (defin: 5) est $m:c$, nam (133) exponens $\frac{am}{bc}$ est æqualis producto ex $\frac{a}{b}$ (exponente rationis $a:b$) in $\frac{m}{c}$ exponentem rationis $m:c$

Definitio septima

Ratio illa geometrica cujus exponens est quadratum exponentis alterius rationis appellatur ratio duplicata, vel ratio quadrata alterius datæ rationis.

Ratio vero, cujus exponens est tertia potestas, seu cubus exponentis alterius rationis, vocatur ratio triplicata

vel cubica alterius rationis [illegible]
[illegible] exponens rationis [illegible]
exponentis alterius rationis dicitur
[illegible]
[illegible] rationis [illegible]
[illegible]
:plicata, et ita procedendo [illegible]
[illegible] ratio [illegible] est duplicata
[illegible] rationis [illegible]
[illegible] est quadratum
exponentis m. Ratio 16: [illegible] duplicata
rationis 30: [illegible] exponens $\frac{16}{2}$,
scilicet [illegible] exponentis
$\frac{30}{40}$, [illegible]
Ratio vero [illegible] ut [illegible]
[illegible] rationis [illegible]
exponens [illegible] exponentis
[illegible]
Similiter ratio [illegible]
rationis [illegible] ejus [illegible]
$\frac{24}{}$ [illegible] exponentis
[illegible] alterius rationis [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] rationibus, [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] (Cor. [illegible] defin. 6)
fiat composita [illegible]
[illegible] cujus exponens [illegible]
duplicatam [illegible]

cujus exponens est m; quam rationis cm: ac, cujus exponens est pariter m.

Similiter ratio ex tribus aequalibus rationibus composita triplicata est uniuscujusque datarum rationum aequalium.

Si ratio componitur ex quatuor aequalibus rationibus, est quadruplicata; si ex quinque, erit quintuplicata.

Corrolarium secundum

Praeterea data qualibet ratione a:c, si quadrentur ejus termini, fiet ratio aa:cc duplicata rationis a:c quia ejus exponens $\frac{aa}{cc}$ (art: n: 150) est quadratum exponentis $\frac{a}{c}$.

Si fiant cubi terminorum a et c habebitur ratio $a^3:c^3$ cubica, seu triplicata rationis a:c, quia (art: n: 151) exponens $\frac{a^3}{c^3}$ est cubus exponentis $\frac{a}{c}$, et sic de caeteris.

Corrolarium tertium.

Tandem ex dictis facile intelligitur quod ratio illa, cujus exponens est radix quadrata exponentis alterius rationis, vocatur ratio subduplicata, vel subquadrata, ejusdem rationis.

Sic ratio bm: b, est subduplicata rationis amm: a, quia ejus

exponens in est radix quadrata
exponentis unius alterius rationis.
Ratio subcubicata, vel subtriplicata
alterius rationis dicitur, si ejus
valor seu exponens est radix
cubica exponentis alterius rationis.
Si exponens est radix quarta
vocatur subquadruplicata, et
ita progrediendo.

Scholium.

Notandum est rationem duplam
(defini. 4.) diversam esse a ratione
duplicata, triplam a triplicata,
subduplam a subduplicata etc.
quia ratio dicitur dupla inversive
absolute, quoties antecedens bis con-
tinet consequentem: ac ratio non dicitur
duplicata nisi referatur ad aliam,
et ejus exponens sit quadratum
exponentis alterius rationis. Idem
de reliquis rationibus multiplicibus et
multiplicatis intelligatur.

Definitio octava

Proportio, sive proportionalitas,
vel analogia est aequalium rationum
comparatio, ut si 2 (ex n. 99)
aequales rationes 12:4, et 15:5
inter se comparentur, fiet proportio
ita duodecim ad quatuor, quemad-
modum quindecim ad quinque,
id est antecedens duodecim [illegible]

relationem habent ad quam conse-
~~[illegible]~~ quam antecedens
[illegible] [illegible] [illegible] in legem
[illegible] [illegible] [illegible],
et item [illegible] [illegible] proportiones
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible];
[illegible] [illegible] habitudinem
habent [illegible] eandem [illegible]
relationem habent [illegible]
Consequenter quatuor termini sunt
Geometrice proportionales, quando
primus eodem modo refertur
ad secundum, ac tertius ad quartum.
Quatuor [illegible] termini [illegible] pro-
portione [illegible] scribuntur 12:4 :: 15:5,
vel 12:4 = 15:5, et leguntur [illegible]
[illegible] vel duodecim ad quatuor aequalis
15:5, et sic de ceteris.
Primus et ultimus termini pro-
portionis dicuntur termini extremi,
vel extrema proportionis, secundus
et tertius vocantur termini medii,
vel media ejusdem proportionis.
Praeterea primus terminus dicitur
primum antecedens proportionis
et tertius terminus vocatur secundum
antecedens proportionis.
Secundus terminus proportionis
apellatur primum consequens
et quartus terminus dicitur secundum
consequens ejusdem proportionis

Unde primus et tertius terminus dicuntur termini omologi, hoc est ejusdem nominis, quia sunt ambo antecedentes; item secundus et quartus termini omologi vocantur, quia sunt ambo consequentes.

Ut data proportione a : b :: c : m, termini a et m termini extremi, b et c termini medii. Praeterea vocantur a primus antecedens, et c secundus; b primus consequens, et m secundus; insuper a et c inter se, item b et m inter se, erunt termini omologi.

Definitio nona.

Geometrica proportio, in qua primus consequens est aequalis secundo antecedenti, hoc est secundus terminus est aequalis tertio, appellatur proportio continua, quae tribus terminis exprimi potest, et indicatur hoc signo ∺ quod eidem proportioni praeponitur.

Sic proportio 24 : 12 :: 12 : 6 est continua et scribitur hoc modo ∺ 24 : 12 : 6, atque legitur proportio geometrica continua viginti quatuor ad duodecim ad sex, sive viginti quatuor ad duodecim eamdem rationem habet, quam duodecim ad sex.

Similiter proportio a : b :: b : c

quae continua, et ita exprimitur
$a : b : c$, atque hujusmodi proportio
continua habet tres terminos.
Quia in proportione continua
secundus terminus, qui etiam
dicitur terminus medius est consequens
primi, et antecedens tertii termini.
Proportio autem geometrica
quae secundus terminus non est
aequalis tertio, vocatur proportio
discreta, ut $8 : 2 :: 12 : 3$, vel $a : b = c : m$.

Definitio decima

Progressio geometrica est series
quantitatum secundum eandem
rationem crescentium, vel decre-
scentium, sive est proportio
continua quae pluribus quam
tribus constat terminis.
Sic $\div\!\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256$ &c.
est progressio crescens, et $\div\!\!\div$
$16 : 8 : 4 : 2 : 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32}$, est
progressio decrescens, et utraque in
infinitum continuari possunt, ut
per se patet.
Similiter $\div\!\!\div\ a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5 : ac^6 : ac^7$
vel $\div\!\!\div\ am^3 : am^2 : am : a : \frac{a}{m} : \frac{a}{m^2} : \frac{a}{m^3} : \frac{a}{m^4}$ &c.
sunt progressiones geometricae.

Definitio undecima

Denominator rationis geometricae
est quotiens, qui oritur dividendo
majorem terminum per minorem

ut rationis a ad ac denominator est $\frac{ac}{a}$
idest c. [illegible] denominator rationis $am^3 : am^2$
est $\frac{am^3}{am^2}$ [illegible]
[illegible] rationem majoris [illegible] inaequalitatis deno:
[illegible] rationis, [illegible]
seu [illegible] rationis [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
Datis igitur denominatore [illegible] rationis
et primo termino [illegible] progressionis geo:
:metricae [illegible]
terminus multiplicando [illegible]
[illegible]
[illegible] secundum [illegible]
per denominatorem m, habebimus [illegible]
terminum am^2 qui multiplicatus per
denominatorem [illegible] am^3,
et ita [illegible] reliqui
[illegible] termini, eritque progressio
$a : am : am^2 : am^3 : am^4$ [illegible]
[illegible] sit progressio [illegible],
[illegible]
[illegible]
primum terminum a^2 per denominatorem
m [illegible] secundum terminum,
[illegible] terminum [illegible]
per denominatorem [illegible]
tertius terminus [illegible]
[illegible]
unde erit progressio [illegible]

$ac^2 : ac : a : \frac{a}{c} : \frac{a}{c^2} : \frac{a}{c^3} : \frac{a}{c^4} : \frac{a}{c^5}$

Corrolarium secundum.

Hinc dato denominatore rationis, et dato primo termino progressionis crescentis, facillime invenitur quilibet terminus quaesitus progressionis geometricae, si denominator elevetur ad potestatem indicatam a quaesiti termini numero unitate minore, et ipsa potestas multiplicetur per primum terminum: ita invenitur quilibet terminus progressionis ÷ $a : ac : ac^2 : ac^3$ etc., elevato denominatore c ad quartam potestatem quae est c^4, et multiplicata per primum terminum, erit ac^4 quintus terminus quaesitus. Si invenienda sit decimus terminus, elevetur denominator c ad nonam potestatem, et multiplicando [illegible] erit ac^9 quaesitus decimus.

At in progressione geometrica descrescente, si denominator elevetur ad potestatem indicatam a quaesiti termini numero unitate minore, et per ipsam potestatem dividatur primus terminus, quotiens dabit terminum quaesitum; sic in progressione ÷ [illegible] $: \frac{a}{m} : \frac{a}{m^2}$: [illegible] si inveniendus debeat sextus terminus, elevetur denominator m ad quintam potestatem, erit m^5, et dividendo primum terminum am^3 per m^5 quotiens $\frac{am^3}{m^5}$ [illegible] idest $\frac{a}{m^2}$ dabit quaesitum

octavum tertiarum, et sic de caeteris

Propositio prima Theorema

Datis quatuor terminis proportionalibus productum extremorum aequale erit producto mediorum.

Sint quatuor termini proportionales $a:b::c:m$; dico productum am extremorum a, et m aequale esse producto bc mediorum b, et c.

Demonstratio

Quoniam ex hypothesi $a:b=c:m$, et aequales rationes (ant: n: 100) continentur fractionibus aequales, ideo erit $\frac{a}{b}=\frac{c}{m}$; atque multiplicando aequales quantitates $\frac{a}{b}$, et $\frac{c}{m}$ per bm (quod est productum consequentium terminorum, sive denominatorum b, et m) producta (ant: n: 134) erunt $\frac{abm}{b}$ et $\frac{bcm}{m}$ aequalia inter se (axio: 4) erit nempe $\frac{abm}{b}=\frac{bcm}{m}$, hoc est $am=bc$ (ant: n. 66), quia dividendo abm per b quotiens est am, et dividendo bcm per m obtinetur quotiens bc; ergo datis quatuor terminis proportionalibus, sive numeri sint, sive lineae, sive alterius cujuscumque generis quantitates, semper erit productum ex primo in quartum aequale producto ex secundo in tertium. Quod erat demonstrandum.

Haec propositio continet primam partem propositionis decimae sextae libri sexti, et primam partem propositionis decimae nonae libri septimi Euclidis.

Corrolarium

Si autem proportio data fuerit continua $a:b::c$, idem $a:b::b:c$, nunc, per ante=cedentem demonstrationem erit $ac=bb$, hoc est productum extremorum aequale erit quadrato medii termini (defin: 9). Quod ab Euclide pro lineis demonstratur in prima parte propositionis decimae sextae libri sexti, et pro numeris in prima parte propositionis 20 libri 7.

Propositio secunda Theorema.

Si fuerint quatuor termini ita inter se comparati, ut productum ex primo in quartum aequale sit facto ex secundo in tertium, ipsi termini proportionales erunt.

Dati sint quatuor termini a, c, m, s ejus conditionis ut rectangulum (ant: n: 14) seu productum as extremorum sit aequale producto cm mediorum; dico praedictos terminos proportionales esse, hoc est posito $as=cm$; erit $a:c::m:s$

Demonstratio.

Ex hypotesi est $as=cm$, et dividendo aequales quantitates as, et cm, per eandem quantitatem cs (quae est productum ex secundo termino c in quartum s) quotientes $\frac{as}{cm}$, et $\frac{cm}{cs}$ hoc est (ant: n: 126) $\frac{a}{c}$ et $\frac{m}{s}$ aequales erunt inter se (axio: 5) erit nempe $\frac{a}{c}=\frac{m}{s}$; sed (ant: n: 100) aequales fractiones constituunt rationes

aequales ideoque erit a:c = m:s, sive a:c::m:s; ergo datis quattuor terminis cujusvis generis, si productum extremorum fuerit aequale producto mediorum, ipsi termini proportionales erunt. Quod erat osten=:dendum.

Haec propositio continet secundam partem propositionis 16 libri 6, et secundam partem propositionis 19 libri 7 Euclidis

Corollarium primum.

Hinc duo producta aequalia, sive qualibet aequatio (vide n. 102) resolvi potest in quattuor terminos proportionales, dummodo primus terminus, et quartus sumantur in eadem parte aequationis (sint nempe factores unius producti) secundus vero, et tertius proportionis terminus sumantur in alia aequationis parte, hoc est sint multi=:plicatores alterius aequalis producti, quod dicitur aequationem dissolvere.

Sint duo producta aequalia ab, et cm, sive data sit aequatio ab=cm, dissolvendo erit pro=:portio a:c::m:b, vel a:m::c:b, aut b:c::m:a vel b:m::c:a, sive erit c:a::b:m, vel c:b::a:m aut m:a::b:c, vel m:b::c, quia semper quattuor termini ita sunt comparati inter se, ut productum extremorum sit aequale producto mediorum, cum ex hipotesi sit ab=cm.

Similiter data aequatione numerica 24x2=12x4 dissolvendo erit 24:12::4:2; vel 12:2::24:4, vel 2:4::12:24 &c.

Corollarium secundum:

Si autem fuerit $am = c$, hoc est $am = 1c$ (axiom: dissolvendo erit $a : 1 :: c : m$, vel $1 : m :: a : c$ &c.; videlicet in omni quantitatum multiplicatione unitas est ad unum ex multiplicatoribus m, sicuti alter multiplicator a ad productum c, quia in a hypot est quantitas c significat productum ex a in m

Corollarium tertium

Similiter data aequatione $am = cc$ dissolvendo erit proportio $a : c :: c : m$, hoc est (defin: 9.) erit ∺ $a : c : m$. Ergo si tres termini a, c, m, fuerint ejus conditionis, ut rectangulum (anit: n 14b) seu productum ex primo in tertium sit aequale quadrato secundi seu medii termini, tunc termini illi erunt continue proportionales: In hoc Corollario continentur secunda pars propositionis 17 libri 6, et secunda pars propositionis 20 libri 7 Euclidis.

Corollarium quartum

Si aequatio $am = cc$ multiplicatur per a (axiomate 4) erit $aam = acc$, et dissolvendo habebitur $a : m :: aa : cc$, quod si multiplicetur per m (axiomate 4) erit $amm = ccm$, et dissolvendo erit $a : m :: cc : mm$. Quapropter quotiescumque fuerint tres termini quotiescumque continue proportionales ∺ $a : c : m$, semper erit primus ad tertium, sicuti quadratum primi ad quadratum secundi; sive ut quadratum

secundi ad quadratum tertii termini; idest
in ratione duplicata primi ad secundum, vel
secundi ad tertium.

Corrolarium quintum

Si fuerit $a=b$, et aequales quantitates a
et b multiplicentur per eandem c (axiom: 4)
erit $ac=bc$; et dissolvendo habebitur proportio
$a:c::b:c$, vel erit $c:a::c:b$. Consequenter
quantitates aequales eandem rationem
habent ad eandem quantitatem; et
vicissim eadem quantitas, eandem
rationem habet ad quantitates aequales.
Est propositio septima libri 5 Euclidis.

Propositio tertia

Theorema

Datis quatuor terminis proportionalibus
Primo erunt etiam proportionales secundus
terminus ad primum, sicuti quartus ad
tertium, quod argumentandi genus
dicitur inversam rationem.
Secundo erunt pariter proportionales
primus ad tertium, sicuti secundus ad
quartum quod dicitur alternare, vel
permutare rationem.
Sint quatuor termini proportionales
$a:b::c:m$;
Primo invertendo erit $b:a::m:c$.
Secundo alternando erit $a:c::b:m$

Demonstratio

Quoniam, ex hypotesi, est $a:b::c:m$
ideo (propositione prima) erit $am=bc$

et (corol: 1 prop: 2.) dissolvendo erit b:a::m:
item erit a:c::b:m.
Ergo datis quatuor terminis proportionali
sive invertendo, sive alternando semper
proportionales remanebunt. Quod erat
demonstrandum.
Prima pars est corrolarium propositionis
4 libri 5, et secunda pars, est propositio
17 ejusdem libri 5 Euclidis.

Corrolarium primum.

Hinc datis quatuor terminis propor:
:tionalibus a: c: :m:r, si primus a fuerit
æqualis tertio m, etiam secundus c æqual
erit quarto r; si autem primus a fuerit
major tertio m, erit pariter secundus c
major quarto m; et si a fuerit minor
m, etiam c minor erit r, et e converso;
quia alternando datam proportionem
erit a: m::c:r per secundam partem
hujus propositionis. In hoc corrolario
continetur propositio 14 libri 5 Euclidis.

Corrolarium secundum.

Quapropter si fuerit a: m: : c:m, vel
m: a::m:c, quia est m=m erit etiam
a=c. Ergo quantitates, quæ habent
eandem rationem ad eandem quantita:
:tem, sunt inter se æquales; similiter
sunt æquales inter se quantitates illæ,
ad quas eadem magnitudo eandem
rationem habet. Est propositio 9
libri 5 Euclidis.

Propositio quarta
Theorema

Si fuerint quatuor termini proportionales, summa primi cum secundo ad secundum eandem rationem habebit quam summa tertii cum quarto ad ipsum quartum. Atque hæc argumentatio dicitur compositio rationis.

Ut proportio $a:b::c:m$, componendo erit $a+b:b::c+m:m$.

Demonstratio

Nam, ex hypotesi est $a:b::c:m$; ideoque (propo: 1) erit $am=bc$; et utrique æquationis parti adjungendo bm (productum consequentium terminorum) habebitur (axiom: 2) alia æquatio $am+bm=bc+bm$ hoc est $\overline{a+b}\times m = \overline{c+m}\times b$ (61) atque dissolvendo (Cor: 1 prop: 2) erit proportio $a+b:b::c+m:m$ quod demonstrare oportebat. Est propositio 18 libri 5 Euclidis.

Corrolarium primum.

Quod si æquationi $am=bc$ addatur ac (productum antecedentium terminorum datæ proportionis $a:b::c:m$) tunc (axiom) habebitur æquatio $ac+am=ac+bc$, scilicet (arit: a: 61) $\overline{c+m}\times a=\overline{a+b}\times c$, et dissolvendo erit $a+b:a::c+m:c$: hoc est summa terminorum primæ rationis ad suum antecedentem, quemadmodum summa terminorum secundæ rationis

ad suum antecedentem

Corrolarium secundum.

Praeterea (secunda parte propos: 3) alternando datam proportionem $a:b::c:m$, erit $a:c::b:m$, et componendo, erit $a+c:c::b+m:m$, vel erit $a+c:a::b+m:b$; idest summa ante:cedentium ad unum ex antecedentibus, ut summa consequentium terminorum ad respondentem consequentem.

Propositio quinta

Theorema

Quoties fuerint quatuor termini propor:tionales, differentia inter primum, et secundum terminum ad ipsum secundum, eandem rationem habebit quam diffe:rentia inter tertium, et quartum ad ipsum quartum. Hoc argumentandi genus dicitur divisio rationis.

Sit proportio $a:b::c:m$ dividendo erit $a-b:b::c-m:m$.

Demonstratio.

Ex data proportione $a:b::c:m$ (prop. 2) oritur aequatio $am=bc$, ex qua utrinque subtrahatur bm, et (axi: 3) remanebit $am-bm=bc-bm$, idest (arit: n. 61) $\overline{a-b}\times m=\overline{c-m}\times b$, et dissolvendo (cor: 1. prop. 2) erit $a-b:b::c-m:m$. Quod erat ostendendum. Est propositio 17 libri 5 Euclidis.

Corrolarium primum.

Si aequationis $am=bc$ partes am et bc

subtrahantur ambae ex ac (producto antecedentium datae proportionis a:b::c:m) tunc (axio: 3) remanebit ac−am=ac−bc hoc est: $\overline{c-m}\times a=\overline{a-b}\times c$, et dissolvendo habebitur a:a−b::c:c−m, idest primus terminus datae proportionis ad differentiam inter primum et secundum, sicuti tertius terminus ad differentiam inter tertium et quartum. Atque hic argumentandi modus, conversio rationis appellatur. Est propositio 19 libri 5 Euclidis.

Corrolarium secundum.

Permutando datam proportionem a:b::c:m, erit a:c::b:m; unde dividendo habebitur a−c:c::b−m:m (idest differentia antecedentium terminorum est ad secundum antecedentem, ut differentia consequentium terminorum ad secundum consequentem) insuper, convertendo proportionem a:c::b:m erit a:a−c::b:b−m, et invertendo habebitur a−c:a::b−m:b, scilicet differentia antecedentium est ad primum antecedentem sicuti differentia consequentium terminorum ad primum consequentem datae proportionis a:b::c:m

Corrolarium tertium

Quoniam datis quatuor terminis proportionalibus a:b=c:m, per antecedentem propositionem, componendo habemus a+b:b=c+m:m, et per hanc propositionem

dividendo est $a-b:b=c-m:m$, ideo (secunda parte prop: 3) alternando has proportiones erit $a+b:c+m=b:m$, et $a-b:c-m=b:m$, ergo (axio: 7) erit $a+b:c+m=a-b:c-m$ et alternando habebitur $a+b:a-b=c+m:c-m$ idest summa terminorum primae rationis est ad differentiam eorundem terminorum sicuti summa terminorum secundae rationis ad ipsorum differentiam; quod dicitur <u>miscere rationem</u>.

Similiter quia est demonstratis (cor: 1 prop: 4 et cor: 2 hujus prop:) est $a+c:a=b+m:b$ et $a-c:a=b-m:b$, miscendo erit $a+c:a-c=b+m:b-m$, nimirum summa antecedentium est ad ipsorum differentiam, ut summa consequentium terminorum ad ipsorum differentiam.

Scholium

Unico exemplo numerico omnia argumentandi genera superius demonstrata declarentur. Sit geometrica proportio $12:4::6:2$ invertendo (prima parte prop: 3) erit $4:12::2:6$ alternando (secunda parte pro: 3) habebitur $12:6::4:2$.

Componendo eandem datam proportionem (prop: 4) fiet $12+4:4::6+2:2$ idest $16:4::8:2$ vel (coro: 1 prop: 4) erit $12+4:12::6+2:6$ nempe $16:12::8:6$, aut (cor: 2 prop: 4) habebitur $12+6:6::4+2:2$ scilicet $18:6::6:2$ vel erit $12+6:12::4+2:2$ hoc est $18:12::6:4$.

Et dividendo eandem proportionem ponitur

12−4:4::6−2:2, idest 8:4::4:2, vel convertendo (cor: 1 hujus prop:) erit 12−4:12::6−2:6, hoc est 8:12::4:6. Item (cor: 2 hujus prop:) erit 12−6:6::4−2:2, scilicet 6:6::2:2, vel erit 12−6:12::4−2:4, videlicet 6:12::2:4, tandem miscendo (cor: 3 hujus prop:) habebitur 12+4:12−4::6+2:2, nimirum 16:8::8:4, vel erit 12+6:12−6::4+2:4−2, idest 18:6::6:2

Propositio sexta

Theorema

Si fuerint duae vel plures Geometricae proportiones discretae, ejusque conditionis, ut ipsi consequentes primae proportionis (servato ordine primi, et secundi) sint antecedentes secundae, et consequentes secundae sint antecedentes tertiae proportionis, atque ita deinceps: erit primus antecedens primae proportionis ad primum consequentem ultimae proportionis, sicuti secundus antecedens primae proportionis ad secundum consequentem secundae proportionis, quod dicitur argumentari ex aequalitate ordinata sive ordinando.

Datae sint proportiones a:b::e:r, et b:c::r:s, et c:m::s:t, in quibus consequentes b, et r primae sunt antecedentes secundae, et consequentes c et s secundae proportionis sunt antecedentes tertiae, ordinando erit a:m::e:t.

Demonstratio

Etenim ex hypotesi habemus a:b =e:r, et b:c=r:s, et c:m=s:t, et (secunda parte prop: 3) alternando singulas proportiones, erit a:e=b:r et b:r=c:s, et c:s=m:t ergo (ax:1) erit a:e=m:t, et alternando erit a:m =e:t hoc est primus terminus primae proportionis ad secundum terminum ultimae proportionis, sicuti tertius primae ad quartum ultimae. Quod erat ostendendum, sunt propositiones 20, et 22 libri 5, et decima quarta libri 7 Euclidis.

Propositio septima

Theorema

Si fuerint duae proportiones ejus conditionis, ut primus consequens primae, sic etiam primus antecedens secundae proportionis et secundus antecedens primae sit pariter secundus consequens secundae proportionis tunc erit primus antecedens primae pro:portionis ad primum consequentem secundae, sicuti secundus antecedens secundae proportionis ad secundum consequentem primi. Quod dicimus argu:mentari ex aequalitate perturbata, vel perturbando.

Sint duae proportiones a:b::s:t, et b:c::m:s in quibus b, et s termini medii primae (servato ordine) sunt etiam termini extremi secundae proportionis, perturbando

erit $a:c::m:t$

Demonstratio

Ex datis proportionibus $a:b::s:t$, et $b:c::m:s$ multiplicando media, et extrema (cor: 1) oriuntur aequationes $at=bs$, et $bs=cm$ ideoque (axio: 1) erit $at=cm$, et dissolvendo (cor: 1 pr: 2) erit proportio $a:c::m:t$, ergo si media primae proportionis fuerint extrema alterius erit primus terminus primae ad secundum secundae proportionis quemadmodum tertius secundae ad quartum terminum primae. Quod erat demonstrandum:

Haec propositio continet propositiones 21, et 23, libri 5, et 22 libri 7 Euclidis

prop Propositio octava

Theorema

Si fuerint plures magnitudines pro:portionales, hoc est plures rationes aequales colligendo erit summa omnium ante:cedentium ad summam omnium conse:quentium, sicut quicumque terminus antecedens ad suum consequentem. Sint quantitates proportionales sive rationes aequales $a:b=c:m=s:t$ colligendo erit $a+c+s:b+m+t=a:b$, vel $=c:m$ &c:

Demonstratio

Habemus ex hypotesi $a:b::c:m$ ideoque componendo (cor: 2 prop: 4) erit $a+c:c::b+m:m$, et alternando

erit $a+c:b+m=c:m$, sed ex hypotesi est $c:m=s:t$, igitur (axio:1) erit $a+c:b+m=s:t$, et (cor:2 prop:4) compo:nendo habebitur $a+c+s:s=b+m+t:t$, et alternando erit $a+c+s:b+m+t=s:t$: est autem $s:t=c:m=a:b$ ex hypotesi, consequenter (axio:1) erit $a+c+s:b+m+t$ $=a:b$ vel $=c:m$

Ergo si fuerint plures magnitudines &c:

Quod erat ostendendum.

Sunt propositiones 12 libri 5, et 12 libri 7 Euclidis.

Propositio nona

Problema

Tribus datis terminis quartum propor:tionalem invenire.

Dati sint tres termini a,c,m, et inveniendus sit quartus, ad quem tertius m, eandem rationem habeat, quam habet primus a ad secundum c.

Resolutio

Multiplicetur secundus c per tertium m et productum cm dividatur per primum terminum a, quotiens $\frac{cm}{a}$ (cor: n: 69) erit quartus quaesitus terminus proportionalis.

Demonstratio.

Quartus quaesitus terminus (cor:n:21) vocetur x, et erit proportio $a:c=m:x$, consequenter (prop:13) erit aequatio $ax=cm$, et dividendo totam aequationem

per a (axio: 5) remanebit $x=\frac{cm}{a}$ ~~remanebit~~ ergo quartus quasitus terminus proportionalis est $\frac{cm}{a}$, qui invenitur dividendo per primum terminum a, productum cm ex secundo termino in tertium. Quod erat faciendum, et demonstrandum.

Sit $a=3$, $c=12$, et $m=7$, erit $x=\frac{12\times 7}{3}$, idest $x=\frac{84}{3}$, nimirum $x=28$, etenim $3:12::7:28$.

Scholium.

In hoc problemate praecipuam Aritmetices regulam demonstravimus, quae proportionum regula dicitur, atque ob ejus praestantiam, et maximam utilitatem regula aurea vocatur, vulgo autem regula trium appellatur.

Reliquae tres Aritmetices regulae Societatis nempe, positionis vel falsi et alligationis, ab hac proportionum regula omnino dependent.

Ut autem per hanc regulam solvantur Aritmeticae quaestiones diligenter animadvertendum est ex tribus datis numeris duos esse inter se homogeneos, et alterum ejusdem generis cum quarto quaesito, atque eo ordine distribuendos esse tres datos numeros, ut medium locum teneat is, qui homogeneus est cum quarto quaesito.

Tertio loco ponatur is, qui quaestionem annexam habet, et ille, qui huic homogeneus est, primo loco scribatur, ut videre est in sequenti exemplo.

Quaeritur quot horis percurrat milliaria 420, tabellarius ille, qui eadem ale:
:critate perficit milliaria 72 horis 12.
In hac quaestione terminus, qui homogeneus est cum quaesito quaesito sunt horae 12, hic ponatur secundo loco, terminus, qui annexam habet quaestionem sunt milliaria 420, hic scribatur tertio loco, primo autem loco ponatur terminus huic homogeneus, idest milliaria 72, hoc modo

72 mill: : 12 hor: : : 420.

Deinde juxta antecedentem demons:
:trationem multiplicetur tertius 420 per secundum 12, et productum 5040 dividatur per primum terminum 72, quotiens 70 erit quartus quaesitus terminus, scilicet horis 70 percurret dicta milliaria 420; est enim 72 : 12 : : 420 : 70, quia est $72 \times 70 = 12 \times 420$.

Quum vero data quaestio pluribus quam tribus constat terminis, idest 5, vel 7, vel 9; tunc regula proportionum dicitur composita, atque reducitur ad simplicem, quia ex datis terminis, praecipui sunt tantummodo tres et alii minus principales cum principalibus

componuntur ut videre est in sequenti quaestione. Milites 50, diebus 8 expenderunt argenteas libras 600, quaeritur quot libras expendere debeant milites 80 diebus 15.

Praecipui termini hujus problematis sunt milites 50, librae 600, et milites 80; atque ad milites 50 spectant dies 8, et ad milites 80 pertinent dies 15, ideoque multiplicantur 50 per 8, et 80 per 15, et primum productum 400, erit primus terminus, secundum productum 1200 erit tertius terminus, medius autem terminus erunt librae 600 itaque erit regula simplex $400 : 600 :: 1200 : x$, atque multiplicando 600 in 1200, et dividendo productum 720000 per 400, quotiens 1800 erit quaesitus numerus librarum.

Praeterea regulas proportionum composita resolvi potest in duas vel plures regulas simplices, sed de his dicta sufficiant, qui plura desiderat, Aritmeticas auctores consulat.

Corrolarium

Duobus datis terminis a, c etiam invenitur tertius continue proportionalis, dividendo quadratum secundi per primum terminum, nam ponendo x pro tertio quaesito, erit proportio continua $∺ a : c : x$, ideoque (cor. prop. 1) erit $ax = cc$, et dividendo aequationem

per a (axio: 5) habebitur $x=\frac{cc}{a}$. consequenter tertius terminus proportio=:nis continuæ est æqualis quotienti, qui oritur dividendo quadratum secundi termini per primum.

Ad datis primo termino a, et tertio termino m, ut inveniatur medius proportionalis et producto am primi a, in tertium m, extrahatur radix quadrata, quæ terminum quæsitum exhibebit; enim data proportio $\div a:x:m$ (Cor: prop: 1) erit $xx=am$, et extraendo radicem quadratam ex quantitatibus æqualibus (arit: n: 182) erit $x=\sqrt{am}$. Si a sit 12, et m sit 3 erit $x=\sqrt{12\times3}$, idest $x=\sqrt{36}$, nimirum $x=6$, unde habebitur $\div 12:6:3$, ut per se patet.

Propositio decima

Theorema

Datis quatuor terminis proportionalibus $a:b::c:m$, si antecedentes per consequentes, vel primus, et secundus terminus, vel tertius, et quartus, vel omnes termini multiplicentur aut dividantur per eandem quantitatem, quatuor termini semper proportionales remanebunt.

Demonstratio.

Quoniam ex hypotesi est $a:b::c:m$, igitur (prop: 1) erit $am=bc$, et multiplicando æquationem pers

(axio: 4) habebitur $ams=bcs$, atque dissolvendo (cor: prop: 2) erit $as:b::cs:m$, vel $a:bs::c:ms$, aut $as:bs::c:m$, vel erit $a:b::cs:ms$.

Quod si aequatio $am=bc$ multiplicatur per ss (axio: 4) erit $amss=bcss$, et dissolvendo habebitur $as:bs::cs:ms$.

Si autem eadem aequatio $am=bc$ dividatur per s (axio: 5) erit $\frac{am}{s}=\frac{bc}{c}$, et dissolvendo (cor: 1 prop: 2) erit $\frac{a}{s}:b::\frac{c}{s}:m$ vel $a:\frac{b}{s}::c:\frac{m}{s}$, vel erit $\frac{a}{s}:\frac{b}{s}::c:m$, vel $a:b::\frac{c}{s}:\frac{m}{s}$; semper enim productum extremorum adaequat productum mediorum.

Tandem aequatio $am=bc$ dividatur per ss et (axio: 5) remanebit $\frac{am}{ss}=\frac{bc}{ss}$, et dissolvendo erit $\frac{a}{s}:\frac{b}{s}::\frac{c}{s}:\frac{m}{s}$; ergo datis quatuor terminis. Quod erat demonstrandum.

Corrolarium primum.

Si aequatio superius inventa $am=bc$ multiplicetur per rs (axio: 4) erit $amrs=bcrs$, et dissolvendo erit $ar:bs::cr:ms$, vel $as:bs::cr:mr$.

Quodsi aequatio $am=bc$ dividatur per quantitatem rs (axiom: 5) habebitur $\frac{am}{rs}=\frac{bc}{rs}$, et dissolvendo erit $\frac{a}{r}:\frac{b}{s}::\frac{c}{r}:\frac{m}{s}$, vel $\frac{a}{r}:\frac{b}{r}::\frac{c}{s}:\frac{m}{s}$.

Quapropter data proportione $a:b::c:m$, si antecedentes per unam quantitatem et consequentes per aliam, vel primus et secundus per unam, et tertius cum quarto

per aliam quantitatem multiplicentur, aut dividantur, semper quatuor termini proportionales erunt.

Corrolarium secundum.

Praeterea multiplicando eandem aequationem $bc=am$ per a (axio:4) habebitur $abc=aam$, et dissolvendo erit $a:m::aa:bc$. Quapropter datis quatuor terminis propor=tionalibus $a:b::c:m$, erit primus ad quartum, sicuti quadratum primi ad productum mediorum, idest $::aa:bc$, sed ratio $aa:bc$ (cor:3 defin:6) composita est ex duabus rationibus $a:b$, et $a:c$ consequenter ratio primi termini ad quartum composita est ex rationibus primi ad secundum, et primi ad tertium.

Propositio undecima

Theorema.

Si duae vel plures proportiones habuerint eosdem consequentes; erit summa priorum ad communem consequentem, sicuti summa secundorum antecedentium ad communem consequentem.

Sint proportiones $a:b::c:m$, et $s:b::r:m$, habentes eosdem consequentes b, et m, erit $a+s:b::c+r:m$.

Demonstratio.

Nam ex datis proportionibus $a:b::c:m$ et $s:b::r:m$ (prop:1) sunt aequationes $am=bc$ et $sm=br$, atque aequalibus aequali adjungendo (axio:2) habebitur

$am+sm=bc+br$, idest $a+s\times m=c+r\times b$, et (cor: 1 prop: 2) dissolvendo erit $a+s:b::c+r:m$. Quod erat demonstrandum. Est propositio 24 libri 5 Euclidis.

Corrolarium

Si autem duae proportiones $a:b::c:m$ et $a:r::c:s$, habuerint eosdem antecedentes a, et c, quia invertendo (prima parte prop: 3) fiunt proportiones $b:a::m:c$, et $r:a::s:c$, habentes eosdem consequentes, ideo demon=stratione antecedenti erit $b+r:a::m+s:c$, et invertendo erit $a:b+r::c:m+s$. Quapropter si duae proportiones habuerint eosdem antecedentes, tunc erit primus communis antecedens ad summam duorum consequentium, ut secundus communis antecedens ad sumam duorum consequentium.

Propositio duodecima

Theorema.

Datis duabus proportionibus multiplicando vel dividendo terminos unius per respon=dentes terminos alterius proportionis producta in primo casu, et quotientes in secundo proportionales erunt.

Sint duae proportiones $a:b::c:m$, et $r:s::t:u$, primo erit $ar:bs::ct:mu$.

Secundo erit $\frac{a}{r}:\frac{b}{s}::\frac{c}{t}:\frac{m}{u}$

Quoniam ex hypotesi est $a:b::c:m$ et $r:s::t:u$, igitur (prop: 1) erit $am=bc$, et $ru=st$, consequenter multiplicando

fiant in ru, et bc per st (axiom: 4) erit amru = bcst, et dissolvendo (coroll. prop: 2) habebitur ar : bs :: ct : mu, quod erat primum.

Si æquatio am = bc dividatur per æquationem ru = st (axio: 3) erit $\frac{am}{ru} = \frac{bc}{st}$, et dissolvendo erit $\frac{a}{r} : \frac{b}{s} :: \frac{c}{t} : \frac{m}{u}$ quod erat propositum.

Propositio decima tertia.

Theorema

Datis quatuor terminis proportionalibus, æquales potestates, et æquales radices eorundem terminorum erunt etiam proportionales.

Primo sit a : b :: c : m, erit $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$ item $a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$, atque ita deinceps.

Demonstratio.

Si enim proportio a : b :: c : m bis scribatur et multiplicentur inter se respondentes termini (propositione antecedenti) habebitur $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$

Quod si hujus proportionis termini multiplicentur per respondentes terminos datæ proportionis a : b :: c : m, fiet $a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$, atque ita procedendo erit $a^4 : b^4 :: c^4 : m^4$ &c.

Secundo si fuerint $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$, vel $a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$ &c. erit pariter a : b :: c : m.

Demonstratio

Quoniam (hypotesi) est $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$ (prop: 1) erit $a^2 m^2 = c^2 m^2$, consequenter extrahendo radicem quadratam (ant. n. 182)

erit $am = bc$, et dissolvendo habebitur $a:b::c:m$. Eodem ratiocinio si fuerit $a^3:b^3::c^3:m^3$ demonstrabitur esse $a:b::c:m$ et sic de caeteris. Quod erat ostendendum.

Propositio decima quarta
Theorema

Duae quaelibet fractiones erunt inter se in ratione composita ex directa ratione numeratorum, et ex ratione inversa, seu reciproca denominatorum.

Erit nempe prima fractio ad secundam, ut productum ex numeratore primae in denominatorem secundae fractionis, ad productum ex numeratore secundae in denominatorem primae.

Sint duae quaelibet fractiones $\frac{a}{m}$, et $\frac{b}{c}$ erit $\frac{a}{m}:\frac{b}{c}::ac:bm$.

Demonstratio

Si enim multiplicetur primus terminus $\frac{a}{m}$ per quartum bm productum (arit: n: 134) erit $\frac{abm}{m}$ idest (arit: n: 123) erit ab. Similiter multiplicando secundum terminum $\frac{b}{c}$ per tertium ac productum erit pariter $\frac{abc}{c}$ idest ab; ergo quatuor praedicti termini (prop: 2) erunt proportionales, nimirum $\frac{a}{m}:\frac{b}{c}::ac:bm$. Sed ratio $ac:bm$ (cor: 3 defin: 6) composita est ex duabus rationibus $a:b$, et $c:m$, quarum prima $a:b$ est ratio directa numeratorum a, et b; secunda vero $c:m$ est ratio inversa rationis

denominatorum m, et c (defin: 5) ergo datae fractiones $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{c}$, sunt inter se in ratione composita ex directa ratione numeratorum et ex ratione reciproca denominatorum; quod erat demonstrandum.

Propositio decima quinta

Theorema.

Fractiones ejusdem nominis sunt inter se in ratione diversa numeratorum. Fractiones vero quae habent eundem numeratorem sunt inter se in reciproca ratione denominatorem.

Primo sint fractiones ejusdem deno=minatoris $\frac{a}{m}$ $\frac{c}{m}$, erit $\frac{a}{m}:\frac{c}{m}::a:c$

Demonstratio.

Nam (prop: antece:) est $\frac{a}{m}:\frac{c}{m}::am:cm$, et dividendo tertium et quartum terminum per m (prop: 10) erit $\frac{a}{m}:\frac{c}{m}::a:c$. Quod erat primum.

Secundo sint fractiones $\frac{a}{c}$ $\frac{a}{m}$ ejusdem numeratoris a, erit $\frac{a}{c}:\frac{a}{m}::m:c$.

Demonstratio.

Etenim (prop: antece:) est $\frac{a}{c}:\frac{a}{m}::am:ac$, et dividendo per a duos ultimos terminos (prop: 10) erit $\frac{a}{c}:\frac{a}{m}::m:c$, scilicet prima fractio ad secundam est reciproce ut denominator secundae ad denomina=torem primae. Quod erat secundum.

Corrolarium primum.

Quapropter si duae inaequales quantitates a et c dividantur per eandem quantitatem m, quotientes $\frac{a}{m}$, et $\frac{c}{m}$ erunt inter se in ratione integrarum quantitatum a, et c quia ex demonstratis, est

$\frac{a}{m}:\frac{c}{m}::a:c$; hoc est dimidium cujusvis quantitatis ad dimidium alterius quantitatis, ut prima quantitas ad secundam, vel tertia pars primae ad tertiam secundae, ut prima ad secundam, atque ita deinceps. Est propositio 15 libri 5 Euclidis.

Corrolarium secundum.

Quod si eadem quantitas a per duas inaequales quantitates c, et m, dividatur, quotientes $\frac{a}{c}$, et $\frac{a}{m}$ erunt inter se in reciproca ratione divisorum c, et m; quia ex demonstratis est $\frac{a}{c}:\frac{a}{m}::m:c$ nimi=rum primus quotiens est ad secundum reciproce ut secundus divisor ad primum divisorem; sic divi=dendo numerum 42 per numeros 2, et 6, erit $\frac{42}{2}:\frac{42}{6}::6:2$, hoc est $21:7::6:2$.

Propositio decima sexta

Theorema.

Si fuerint quotcumque quantitates ejusdem generis ratio primae ad ultimam composita erit ex omnibus intermediis rationibus, scilicet ex rationibus primae ad secundam, secundae ad tertiam, tertiae ad quartam &c.

Sint quantitates homogeneae a, b, c, m, s, t, r &a; dico rationem $a:r$ compositam esse ex omnibus intermediis rationibus $a:b$, $b:c$, $c:m$, $m:s$, $s:t$, $t:r$.

Demonstratio.

Intermediarum rationum $a:b$, $b:c$, $c:m$, $m:s$, $s:t$, $t:r$ multiplicentur inter se antecedentes a, b, c, m, s, t, et consequentes b, c, m, s, t, r, pariter inter se multi=plicentur, producta a, b, c, m, s, t, et bcmstr (cor: 3 defin: 6) constituent rationem abcmst: =bcmstr compositam ex omnibus datis rationibus intermediis; sed (prop: 2) est abcmst: bcmstr

∴ a:r; quia productum extremorum ab cmst ×r adaequat productum mediorum bcmst ×a, ergo ratio primae a ad ultimam r componitur ex omnibus intermediis rationibus a:b, b:c, c:s &c; quod erat propositum.

Sint numeri 48, 12, 6, 24, 4, 2, 16, 8; ratio primi 48 ad ultimum 8, composita erit ex omnibus intermediis rationibus 48:12, 12:6, 6:24, 24:4, 4:2, 2:16, 16:8; quia si exponentes $\frac{48}{12}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{16}{8}$, idest 4, 2, $\frac{1}{4}$, 6, 2, $\frac{1}{8}$, 2, multiplicentur inter se productum erit $4\times2\times\frac{1}{4}\times6\times2\times\frac{1}{8}\times2$ hoc est $\frac{192}{32}$, scilicet 6, et exponens rationis 48:8, et pariter $\frac{48}{8}$, scilicet 6, ideoque (defin. 6), et ratio ex illis componitur.

Corrolarium.

Ergo quaelibet data ratio a:b dividi potest in quotcumque rationes: si enim inter antecedentem a, et consequentem b interponantur quotcumque magnitudines homogeneae quantitatibus a, et b, tunc per antecedentem demonstrationem ratio a:b composita erit ex omnibus intermediis rationibus, consequenter divisa erit in totidem rationes, quot erunt rationes intermediae.

Ut data ratione 6:2, si inter 6, et 2 interponantur numeri 5, 4, 7, quia (demons. antece.) datis numeris 6, 5, 4, 7, 2, ratio primi 6 ad ultimum 2 componitur ex omnibus intermediis rationibus 6:5, 5:4

4:4, 4:2, ideo ratio 6:2 divisa erit in prædictas quatuor rationes, ut evidens est.

Propositio decima septima
Theorema.

In omni geometrica progressione ratio primi termini ad tertium duplicata, seu quadrata est rationis primi ad secundum. Ratio primi ad quartum est triplicata rationis primi ad secundum. Ratio primi ad quintum est quadruplicata rationis primi ad secundum, et ita deinceps.

Sit geometrica progressio ÷ a:b:c:m:s:r, erit a:c::a^2:b^2 (cor:4 prop:2.) &c.
Præterea erit a:m::a^3:b^3
a:s::a^4:b^4. a:r::a^5:b^5 &c.

Demonstratio.

Ceterum (prop: ante:) ratio a:m componitur ex tribus intermediis rationibus a:b, b:c, c:m, quæ (hypotesi) sunt inter se æquales, consequenter (cor:1 defin:4) ratio a:m erit triplicata uniuscuiusque ipsarum, erit igitur a:m::a^3:b^3 (cor:2 defin:7).
Eodem ratiocinio ostenditur rationem a:s quadruplicatam esse rationis a:b, quia (prop: antece:) ratio a:s componitur ex quatuor rationibus a:b, b:c, c:m, m:s, æqualibus, inter se, unde erit a:s::a^4:b^4.
Similiter ratio a:r demonstratur

quintuplicata rationis $a:b$, et sic de cæteris. Quod erat ostendendum.

Corrolarium.

Consequenter ratio $a:b$, primi nempe ad secundum (cor. 3 defin: 4) est sub:duplicata rationis $a:c$ primi ad tertium, est subtriplicata rationis $a:m$ primi ad quartum, et sic deinceps.

Propositio decima octava

Theorema.

In omni geometrica progressione, productum extremorum adæquat pro:ductum terminorum ab extremis æque distantium; et æquale est quadrato termini medii, quando terminorum numerus est impar.

Demonstratio.

Sit quælibet progressio geometrica $\div\, a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5 : ac^6 : ac^7$ &c. erit $a \times ac^7 = ac \times ac^6 = ac^2 \times ac^5 = ac^3 \times ac^4$, idest $= a^2c^7$, ut per se patet.

Item data progressione $\div\, ac^8 : ac^7 : ac^6 : ac^5 : ac^4$ &c. erit $ac^6 \times ac^4 = ac^7 \times ac^5 = a^2c^{12}$ quadrato termini medii ac^6, ut evidens est.

Propositio decima nona

Problema

Datis denominatore rationis, minimo, et maximo geometricæ progressionis terminis, summam omnium terminorum invenire.

Resolutio

A maximo termino subtrahatur minimus, et residuum dividatur per denominatorem rationis unitate minutum, et quotienti addatur maximus terminus, atque habebitur quaesita summa omnium terminorum.

Sint geometricae progressionis minimus terminus a, maximus ac^5, et denominator rationis c, ut inveniatur summa omnium terminorum subtrahatur minimus terminus a, ex maximo ac^5, et residuum $ac^5 - a$, dividatur per denominatorem c unitate minutum, idest per $c-1$ (arit: n: 75, 76) invenietur quotiens $ac^4 + ac^3 + ac^2 + ac + a$, cui addatur terminus maximus ac^5, et erit $ac^5 + ac^4 + ac^3 + ac^2 + ac + a$ quaesita summa omnium terminorum progressionis $\div\!\!\div a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5$, ut per se patet.

Sit progressio $\div\!\!\div 3 : 9 : 27 : 81 : 243$, summa omnium terminorum erit $\frac{243-3}{3-1} + 243$, idest $\frac{240}{2} + 243$, nimirum erit $120 + 243$, scilicet 363.

Definitio duodecima

Quando inter se comparantur duae quantitates homogeneae, et consideratur differentia inter primam, et secundam, tunc comparatio illa dicitur ratio arithmetica, tunc $a : a + m$ est ratio

aritmetica, in qua secundus terminus a+m excedit primum a per quanti:tatem m. Item 9:5 est ratio arit:metica, quando consideratur numerum 9 excedere numerum 5 per quatuor unitates.

Aequales vocantur rationes aritmeticae quae habent differentias aequales, sive quarum antecedentes aequaliter suos consequentes, vel aequaliter a consequentibus deficiunt. Sic rationes 8:5, et 12:9 sunt aequales, quia 8−5 adaequat 12−9.

Similiter sunt rationes aritmeticae aequales a: a+m, et b: b+m, quia antecedentes a, et b per eandem quan:titatem m deficiunt a suis consequen:tibus a+m, et b+m.

Comparando inter se duas aritmeticas rationes aequales oritur proportio arit:metica.

Sic 8:5 est ut 12:9, quae ita scribitur 8.5∴12.9, et discreta vocatur quando secundus terminus non est aequalis tertio.

Proportio vero aritmetica continua dicitur, quando primus est ad secundum ut idem secundus ad tertium terminum qua hoc signo indicatur ÷, ut ÷ 2:5:8, vel ÷ a: a+c: a+2c: a+2c

Series vero quantitatum secundum

eandem differentiam crescentium, vel decrescentium dicitur progressio arimetica, ut progressio ÷ 1:2:3:4:5:6:7:8:9 &c.: quae dicitur series numerorum natura=lium, vel progressio ÷ 1:4:7:10:13:16:19:22 &c.: Item ÷ a:a+c:a+2c:a+3c:a+4c &c. vel ÷ a:a−c:a−2c:a−3c:a−4c &c.: Similiter est progressio aritmetica et decrescens ÷ 8:5:2:−1:−4:−7:−10 &c.:

Propositio vigesima

Theorema

In aritmetica proportione summa extremorum adaequat summam me=diorum, et dupla est termini medii in ÷ proportione continua

Demonstratio

Etenim data proportione aritmetica a:a+m::c:c+m evidenter est summam a+c+m extremorum aequalem esse summae a+m+c mediorum.

Similiter si fuerint a:a−c::b:b−c, erit a+b−c=a−c+b, ut patet

Si autem fuerit proportio continua ÷ a:a+m:a+2m, summa extre=morum a+a+2m, hoc est 2a+2m dupla erit termini medii a+m.

Ut 12:7::20:15, erit 12+15=20+7.

Et si fuerit ÷ 5:8:11, erit 5+11 duplum medii 8.

Corrolarium

Ergo datis tribus aritmeticae proportionis

terminis invenietur quartus, si ex summa secundi cum tertio subtrahatur primus terminus, quia, ex demonstratis, summa secundi cum tertio adaequat summam secundi cum quarto.
Ut datis tribus terminis a, a+c, m, quartus proportionalis erit a+c+m−a, scilicet m+c, est enim $\div a : a+c :: m : m+c$.
Si autem duobus terminis quaeratur tertius continue proportionalis, tunc ex duplo secundi subtrahatur primus, residuum erit unicus terminus.
Ut duobus terminis a, a+m, tertius continue proportionalis erit 2a+2m −a, hoc est a+2m.
Tandem medius proportionalis invenitur accipiendo dimidium summae primi cum ultimo.
Sic inter duos numeros 12, et 18, medius aritmeticae proportionalis erit $\frac{12+18}{2}$, nimirum $\frac{30}{2}$, sive 15. Est enim $\div 12 : 15 : 18$.

Propositio vigesima prima
Theorema

In omni progressione aritmetica summa extremorum est aequalis summae terminorum ab extremis aeque distantium, et dupla est termini medii, quando terminorum numerus est impar.

Ut in progressione aritmetica ÷ $a:a+c:a+2c:a+3c:a+4c:a+5c$, est $a+a+5c=a+c+a+4c=a+2c+a+3c$ scilicet $=2a+5c$. Et in progressione ÷ $a:a+m:a+2m:a+3m:a+4m$, est $a+a+4m=a+m+a+3m=2a+4m$. Duplo termini medii $a+2m$.

Sit ÷ $1:4:7:10:13:16:19$ erit $1+19=4+16$, $=7+13=10\times2$.

Item data progressione ÷ $9:7:5:3:1:-1:-3:-5$ &c: erit $9-5=7-3=$ ~~5−1~~ $=3+1$.

Corrolarium

Datis primo termino, et ultimo et numero terminorum progressionis aritmeticae, invenietur summa omnium terminorum si summa primi cum ultimo multiplicetur per numerum terminorum et productum dividatur per numerum 2; Ut progressionis ÷ $a:a+m:a+2m:a+3m:a+4m$, cujus terminorum numerus est 5, et summa primi cum ultimo est $2a+4m$, summa omnium terminorum erit $\frac{2a+4m\times5}{2}$, idest $\frac{10a+20m}{2}$, nimirum erit $5a+10m$, ut evidens est.

Item progressionis ÷ $1:5:9:13:17:21$, summa erit, $\frac{22\times6}{2}=\frac{132}{2}=66$. Et progressionis ÷ $7:5:3:1:-1:-3:-5$, summa erit $\frac{7-5\times7}{2}=\frac{2\times7}{2}=7$. Nam est $7+5+3+1-1-3-5=7$.

Praeterea si ex maximo termino subtra=hatur minimus, et productum dividatur

per terminorum numerum unitate minutum, quotiens dabit differentiam. Ut in progressione ÷ 7 : 5 : 3 : 1 : −1 : −3 : −5, subtrahendo minimum −5 ex maximo 7, et dividendo residuum 7+5, idest 12 per terminorum numerum unitate minutum, idest per 7−1, sive per 6, quotiens $\frac{12}{6}$, hoc est 2, erit quaesita differentia.

Elementorum geometriae Liber secundus

Definitio prima

Corpus, vel solidum dicitur quantitas illa, quae trinam habet dimensionem, scilicet longitudinem, latitudinem, et profunditatem, seu altitudinem.

Definitio secunda

Superficies est quantitas, quae habet longitudinem, et latitudinem sine profunditate; est nempe extremum corporis extensum in longum, et latum, sine ulla crassitudine.

Definitio tertia

Linea est quantitas, quae habet longitudinem tantum sine latitudine, et sine crassitudine, sive est extremum superficiei extensum in longum sine latitudine.

Definitio quarta

Punctum geometricum est signum

in quantitate continua, quod a mente nostra concipitur sine ulla extensione est nempe extremum seu terminus lineae sine extensione; sive est signum sectionis lineae in duas partes:

Scholium

Linea generari intelligitur ex fluxu puncti, Superficies ex fluxu lineae, et corpus ex fluxu superficiei

Definitio quinta.

Linea recta, est brevissima omnium linearum, quae ab uno ad aliud punctum duci possunt.

Linea vero curva dicitur illa, quae non est brevissima omnium linearum, quae affluunt a puncto ad punctum duci possunt.

Corrolarium.

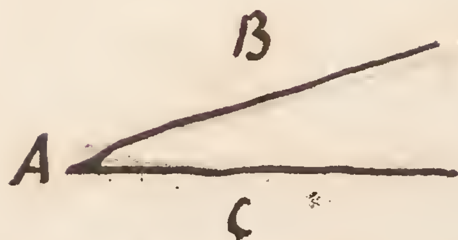
Ergo unica recta linea ab uno ad aliud punctum duci potest, sive inter duo data puncta, duae vel plures lineae rectae duci nequeunt. Consequenter si termini unius rectae lineae positi fuerint supra terminos alterius rectae lineae, necessario illae duae rectae aequales erunt, et una supra alteram perfecte cadet, idest congruent.

Definitio sexta

Superficies plana, sive planum, est cujus omnibus partibus linea recta accomodari potest.

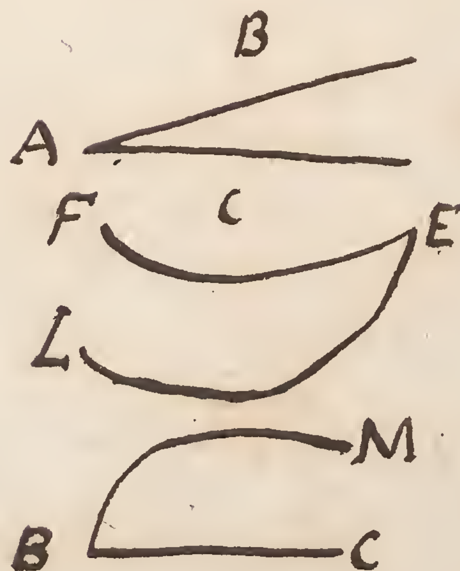
Superficies autem illa, supra quam quaqua versus aptari nequit linea recta, superficies curva appellatur, quae dicitur superficies convexa, quando est superficies externa corporis rotundi. Interna vero corporis rotundi superficies, concava nuncupatur.

Definitio septima



Angulus planus, est ~~inf...~~ l'inclinatio duarum linearum in eodem plano sese mutuo tangentium, et non in directum, jacentium.

Punctum concursus linearum, in quo fit angulus anguli vertex appellatur, et lineae angulum constituentes dicuntur latera, vel crura ejusdem anguli.



Angulus planus rectilineus dicitur ille, qui constituitur a duabus rectis lineis. Curvilineus vocatur, quando continetur a duabus lineis curvis.

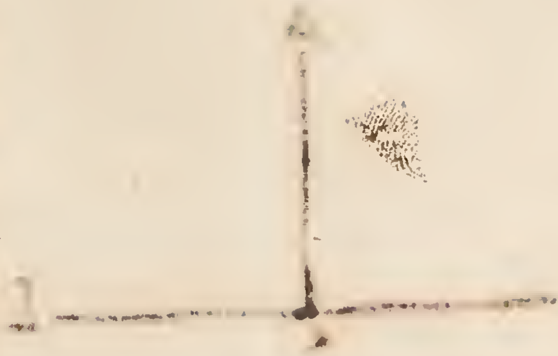
Mixtilineus appellatur angulus, qui efficitur ab una linea recta, et altera curva.

Quapropter linearum rectarum ab, ac, se mutuo tangentium in puncto a, alterius ad alteram inclinatio, est angulus planus rectilineus, inclinatio curvarum fe le, in puncto e se invicem tangentium, est angulus curvilineus.

Angulus vero constitutus a recta bc,

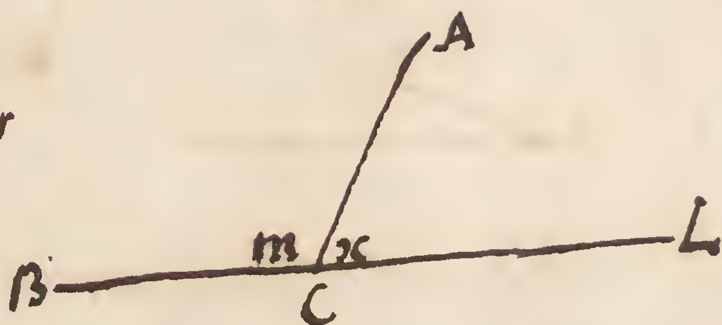
et a curva b m, est mixtilineus.

Quilibet angulus planus tribus alphabeti literis designatur, quarum media anguli verticem denotat. Ut angulus contentus a lineis a b, a c, vocatur angulus c a b, vel b a c.



Unica litera prope verticem anguli posita, etiam indicatur angulus quando duae tantum lineae ad idem punctum concurrunt.

Sic dictus angulus c a b, etiam appellatur angulus a.



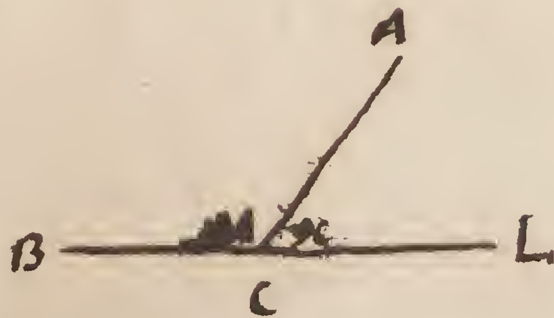
Praeterea angulus planus designatur a parva litera posita in vertice anguli, inter duo latera ejusdem anguli.

Ut angulus a c l contentus a lineis a c, c l, designatur a litera x, at angulus B C A indicatur a litera m.



Corrolarium.

Quoniam angulus planus in sola linearum se mutuo tangentium inclinatione consistit, ideo major vel minor linearum longitido angulum non auget nec minuit. Sic angulus C A B non mutatur, quamvis latera A B, A C, versus B, et C indefinite producantur.



Definitio octava.

Recta linea super aliam rectam



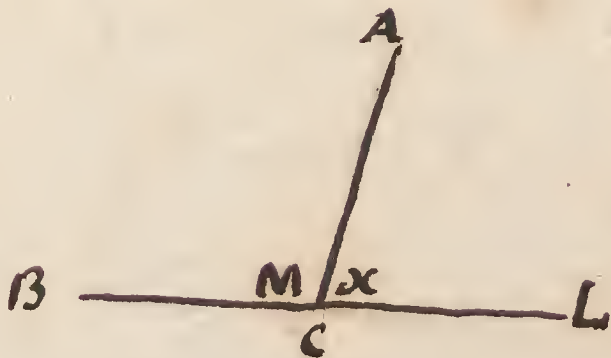
insistens, duos efficit angulos qui di:
:cuntur angulì deinceps positi, vel
anguli consequentes, quales sunt
duo anguli m, et x, vel duo A BC, ABL.

Definitio nona

Quum recta linea (AB) super aliam rectam (CL) incidens, non magis versus unam, quam versus alteram partem inclinatur, et ideo anguli consequentes (ABC, ABL), sunt æquales, uterque æqualium angulorum vocatur rectus, et recta AB, alteri (CL) insistens, dicitur perpendicularis, vel normalis, aut perpendiculum.

Corrolarium

Ergo ad rectam CL, et ex puncto in ea B unica recta perpendicularis B,A, duci potest, quia in unica positione BA, linea non magis inclinatur versus unam, quam versus alteram partem.



Definitio decima.

Quando recta linea (AC) super aliam rectam (BL) consistens, magis versus unam, quam versus alteram partem inclinatur, ac proinde efficit angulos consequentes (m, et x) inæquales; tunc ipsa recta (AC) alteri (BL) insistens, dicitur linea obliqua, et inæqualium angulorum illæ (ACB, seu m) qui major est recto obtusus vocatur. qui vero (ACL, sive x) minor est recto dicitur

angulus acutus.

Corrolarium.

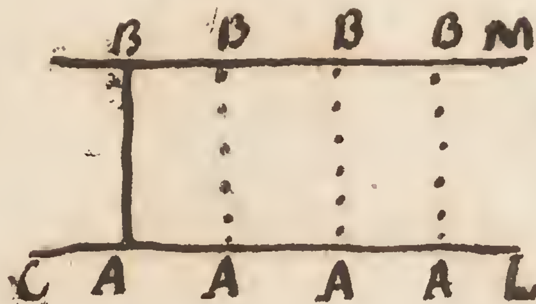
Hinc angulus rectus est ille, cui ex altera parte aequalis angulus efficitur, si unum latus producatur.

Angulus obtusus est ille, cujus unum latus productum, constituit angulum consequentem ipso minorem.

Angulus vero acutus est, cujus unum latus ex altera parte productum, efficit angulum consequentem ipso majorem

Definitio undecima

Lineae parallelae, seu aequidistantes dicuntur quae in eodem plano existentes eandem semper inter se distantiam servant, unde quamvis utrinque in infinitum producantur, nunquam tamen convenient. Ut si recta terminata AB vel perpendiculariter moveri, seu fluere concipiatur supra CL; ejus punctum extremum B describet lineam BM parallelam, seu aequidistantem rectae CL. Consequenter quando perpendiculares lineae inter illas lineas interpositae aequales sunt inter se illae duae rectae sunt parallelae seu aequidistantes.



Definitio duodecima.

Figura est spatium ab uno vel pluribus terminis undique clausum.

Definitio decima tertia:

Figura plana est superficies plana quae ab unica vel a pluribus undique

terminatur.

Rectilinea dicitur figura plana, quæ a lineis rectis undique clauditur.

Curvilinea est, quæ a lineis curvis termi=natur

Mixtilinea vero apellatur figura plana quæ partim a lineis curvis, partim a lineis rectis circumscribitur.

Latera figuræ planæ sunt lineæ, quæ figuram terminant, atque claudunt.

Omnes vero lineæ, quæ figuram terminant, simul sumtæ, dicuntur perimetros, vel circuitus, ejusdem figuræ.

Corrolarium.

Ergo duæ rectæ lineæ figuram constituere nequeunt, quia spatium undique claudere non possunt.

Definitio decima quarta.

Figura solida est spatium ab unica, vel a pluribus superficiebus, undique terminatum.

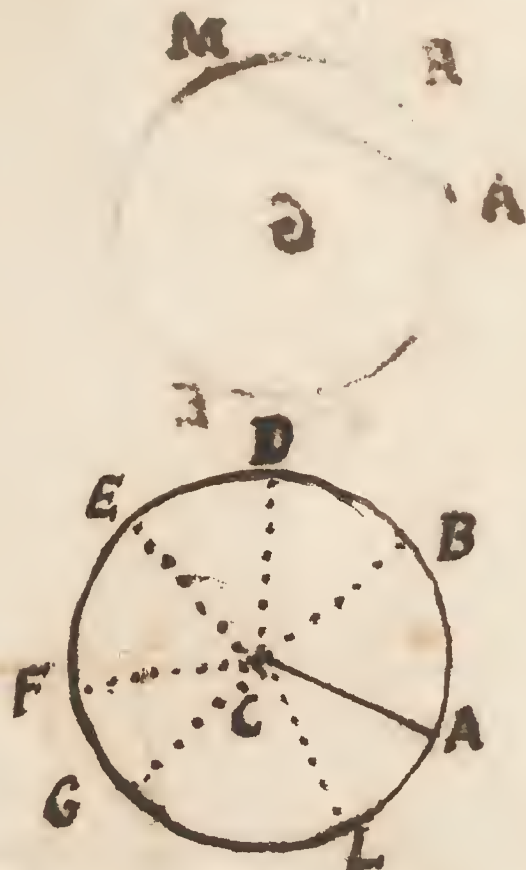
Scholium.

Geometriæ pars illa, in qua de figuris planis, de lineis, et angulis in plano descriptis agitur, geometria plana vocatur, altera vero pars, in qua solidorum proprietates explanantur, Geometria solida apellatur.

Definitio decima quinta

Circulus, est figura plana curvilinea ab unicá lineá curva terminata cujus singula puncta æqualiter

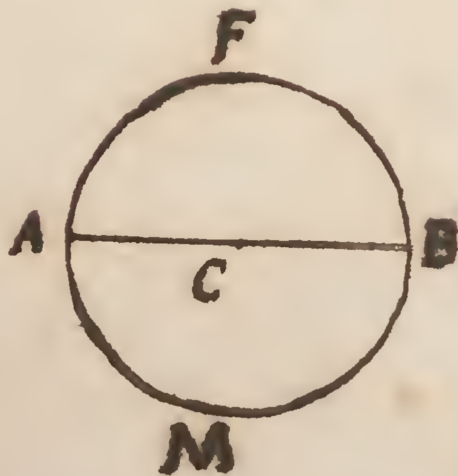
distant a puncto medio.
Ut si recta quaelibet linea terminata (CAC) circa alterutrum ejus extremum (C) fixum, et immobile, tamdiu revolvi concipiatur in plano (ex A, per B, D, E, F &c.) donec ad idem punctum (A) sive ad eandem positionem (AC) ex qua discesserat, revertatur figura plana curvilinea (CABDFL) ex fluxu ejusdem rectae (AC) descripta, circulus appellatur.



Linea curva (ABDEFGLA) ab altero circumductae rectae extremo (A) descripta, circumferentia dicitur, vel periferia vel perimetros circuli. sive etiam vocatur linea rotundationis, aut linea circinationis.
Circumferentiae partes (ut ABD, EF, AL &c.) arcus circuli dicuntur.
Punctum medium (C) centrum circuli appellatur.
Lineae rectae CA CB CD &c. a circuli centro, et a periferia terminatae, vocantur radii, vel semidiametri ejusdem circuli. Qui omnes sunt inter se aequales, ut evidens est.

Definitio decima sexta

Circuli diameter, vel dimetiens dicitur quaelibet recta per centrum ducta, et utrinque ad periferiam terminatam ut AB, quae circulum bifariam, hoc in duas partes aequales dividit, quae semicirculi vocantur.





Consequenter semicirculus, est figura plana mixtilinea terminata a diametro, et a dimidia circuli peripheria, ut AFB, vel ABM.

Definitio decima septima

Circuli corda vel subtensa vocatur quælibet recta linea utrinque ad peripheriam terminata quæ per centrum circuli non transit, ut AM, atque circulum dividit in duas inæquales partes, quæ dicuntur circuli segmenta, vel portiones, unde segmentum vel portio circuli est figura plana mixtilinea comprehensa a circuli arcu et a corda, atque segmentum majus dicitur illud (AEM) in quo reperitur centrum circuli, alterum vero (ABM) segmentum minus vocatur.

Definitio decima octava

Figura trilatera vel triangulum rectilineum est figura plana rectilinea a tribus lateribus terminata, cujus species ratione laterum sunt tres, nimirum.

Definitio decima nona

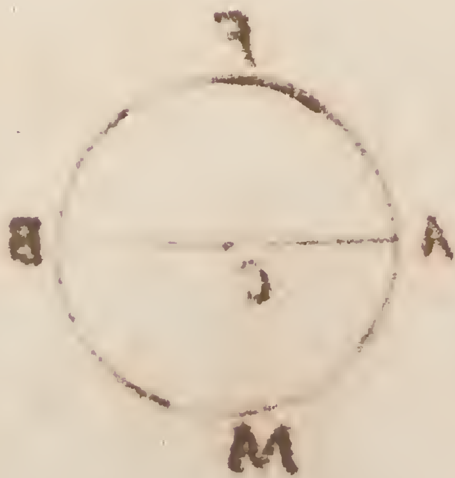
Triangulum æquilaterum, quod habet omnia latera æqualia, ut ABC

Definitio vigesima

Triangulum Isosceles, vel æquicrurum quod duo tantum latera æqualia habet, ut ABD.

Definitio vigesima prima

Triangulum scalenum, quod habet omnia latera inæqualia, ut EFG.



Scholium

Triangulorum species ratione angulorum sunt pariter tres, quia, ut demonstrabimus, vel omnes tres anguli sunt acuti, vel unus est rectus, aut obtusus, et reliqui duo acuti.

Definitio vigesima secunda.

Triangulum rectangulum, vel orthoghonium est quod habet unum angulum rectum, ut LMN.

Definitio vigesima tertia

Triangulum obtusangulum, vel amblighonium dicitur quod habet unum angulum obtusum, ut OPQ.

Definitio vigesima quarta.

Triangulum acutangulum, vel oxighonium habet omnes angulos acutos ut RTU.

Definitio vigesima quinta.

In quolibet triangulo rectangulo latus appositum angulo recto vocatur Iphotelusa, reliqua duo latera angulum rectum constituentia chatedi appellantur.

Scholium

In quovis triangulo rectilineo septem consideranda occurrunt tria latera tres anguli, et ipsum triangulum videlicet superficies plana a tribus lateribus undique terminata.

Quatervero nominatis duobus trianguli lateribus reliquum latus vocatur basis ejusdem trianguli; et basis trianguli Isoscelis est latus inaequale.

Definitio vigesima sexta

Figura plana rectilinea a quatuor rectis lineis undique terminata vocatur figura quadrilatera seu figura quadrangularis, quia habet pariter quatuor angulos, ut ABCD.

Definitio vigesima septima.

Parallellogrammum seu figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt paralella, atque dicitur rectangulum quando ejus quatuor anguli sunt recti obliquangulum vero, quando habet angulos obliquos. Praeterea vocatur aequilaterum, quando habet omnia quatuor latera aequalia inter se, ut EFGH.

Definitio vigesima octava

Quadratum est parallellogrammum aequilaterum, et ~~obliqu~~ rectangulum, ut ~~~~ LMNO.

Definitio vigesima nona

Rhombus est paralellogrammum aequilaterum, et obliquangulum, ut PQRS.

Definitio trigesima.

Figura altera parte longior, quae etiam rectangulum vel oblongum dicitur, est paralellogrammum rectan:

-gulum, et non æquilaterum, sed habet binas opposita latera æqualia.

Definitio trigesima prima.

Rhomboides est parallelogrammum obliquangulum, et non æquilaterum; habet autem binas latera opposita æqualia inter se.

Definitio trigesima secunda

Trapesium dicitur omnis alia figura quadrilatera, quæ parallelogrammum non est.

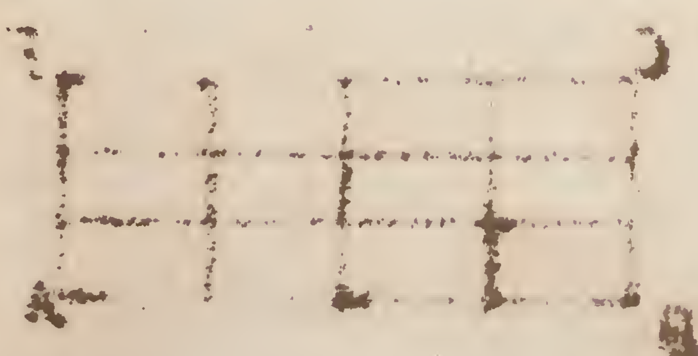


Definitio trigesima tertia.

Figuræ planæ rectilineæ, quæ a pluribus quam quatuor lateribus undique terminantur multilateræ, vel multangulæ, vel polighoniæ figuræ appellantur. Atque polighonum a quinque lateribus comprehensum pentagonum vocatur a sex, sexagonum, a septem eptagonum, ab octo octogonum a novem enganogum, atque ita de reliquis figuris multilateris quæ semper nomen desumunt a numero laterum, vel ab æquali numero angulorum.

Definitio trigesima quarta.

Linea diagonalis cujusvis figuræ est rectalinea intra figuram ducta a quolibet angulo ad alium angulum ipsi oppositum. quæ linea in paralellogrammo vocatur diameter parallellogrammi.

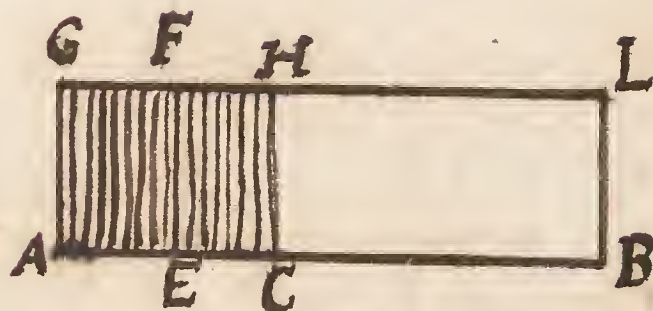


Definitio trigesima quinta.

Area cujusvis figuræ planæ est

superficies sive spatium a perimetro ejusdem figurae undique clausum, ut Area trianguli est superficies terminata a tribus lateribus ejusdem trianguli, Area circuli est spatium a peripheria ejusdem circuli comprehensum; et sic de caeteris.

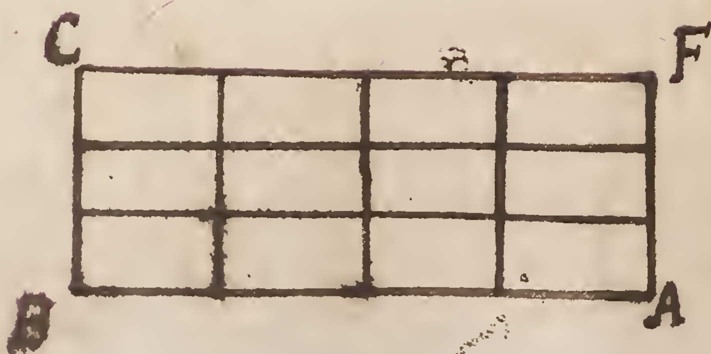
Definitio trigesima sexta



Si quaelibet recta linea terminata AC perpendiculariter moveri, seu fluere concipiatur supra rectam terminatam AB, et in omni positione AC, EF, CH &c. sui vestigium relinquere donec perveniat ad positionem BL, tunc recta AC eodem motu, seu fluxu describet rectangulum ACLB.

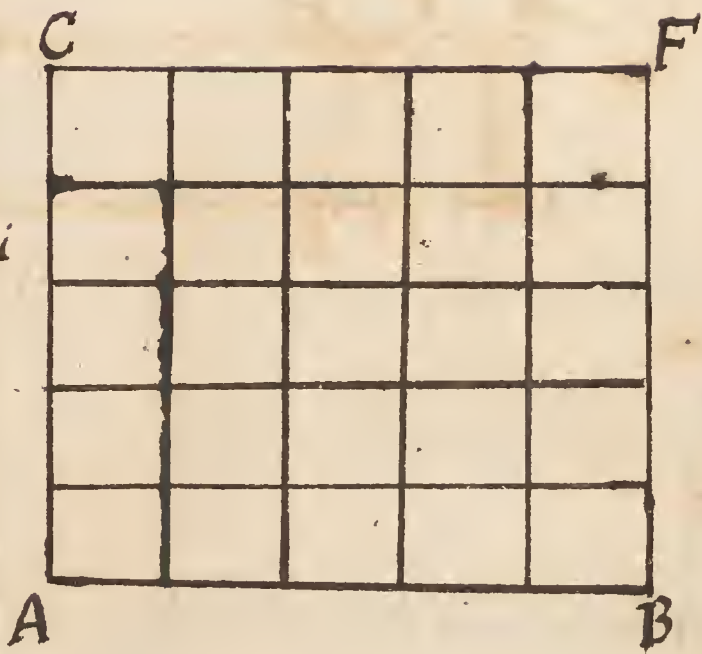
Idem rectangulum AL obtinetur, si recta AB perpendiculariter fluere concipiatur supra AC.

Unde rectangulum AL componi intelligitur ex totidem lineis aequalibus rectae AC, quot sunt elementa, seu puncta constituentia rectam AB, sive quod idem est rectangulum AL concipitur ex totidem lineis aequalibus rectae AB componi, quot sunt elementa seu puncta in recta AC.

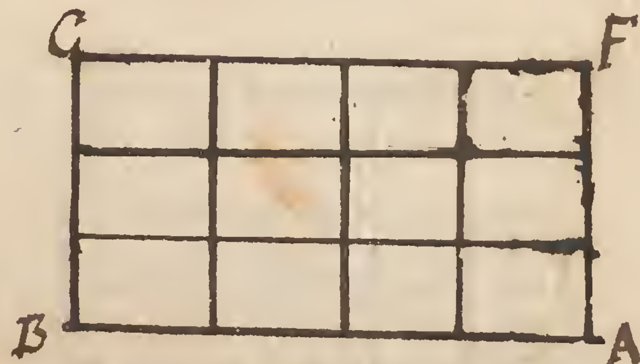


Hinc quodlibet rectangulum AL fieri seu contineri dicitur a duobus lateribus contiguis AB, AC, angulum rectum constituentibus, atque latus AB vocatur basis, et perpendiculum AC apellatur

altitudo ejusdem rectanguli.
Quapropter Area cujusvis rectanguli ABCF invenitur multiplicando basim AB in altitudinem BC, etenim si basis AB fuerit unciarum, seu digitorum quatuor longitudo, et altitudo BC trium multiplicando 4 in 3 productum 12 exhi=
=bebit Aream dati trianguli AC
Si autem basis cujuscumque rectanguli vocetur B, et altitudo vocetur M, tunc productum BM significabit Aream ejusdem rectanguli.



Cum vero basis AB est aequalis altitudini AC, tunc rectangulum AF ab ipsis contentum apellatur quadratum lineae AB, vel quadratum lineae AC, atqui si basis AB fuerit quinque unciarum longitudinis etiam altitudo AC continebit quinque uncias longitudinis, et productum ex 5 in 5 idest 25 exprimet Aream ejusdem quadrati.
Si quadrati basis AB vocetur a aequalis altitudo AC erit pariter a, et productum aa vel a^2 indicabit Aream quadrati ex linea AB vel ex linea AC.



Corolarium.

Linea igitur per aliam lineam multipli=
cata non lineam, sed superficiem producit, ut multiplicando lineam BA unciarum quatuor per lineam BC trium unciarum longitudinis

productum est quidem duodecim, sed non sunt duodecim unciæ longitudinis, sunt enim ut apparet duodecim superficies quadratæ, quarum una quævis habet unciam unam longitudinis, et unciam alteram latitudinis; atque hujusmodi parva superficies quadrata, apellatur uncia quadrata.

Quapropter mensuræ aliæ sunt lineares, quibus locorum distantias dimetimur, aliæ vero dicuntur mensuræ superficiales, quibus superficies omnes dimetiantur. Lineares mensuræ nostrates sunt pes eliprandus, qui dividitur in duodecim partes æquales, quæ unciæ, vel digiti lineares apellantur. Uncia linearis dividitur in alias duodecim partes æquales, quæ vulgo puncta linearia dicuntur.

Punctum lineare adhuc dividitur in duodecim partes æquales, quæ Atomi lineares vocantur. Habemus præterea exapedam, quæ continet sex pedes eliprandos longitudinis, et perticam quæ habet duodecim pedes eliprandos longitudinis, idest duas exapedas. Insuper ad dimetiendos pannos utimur ulna, quæ habet longitudinem quatuordecim unciarum, hoc est unius pedis cum duabus unciis.

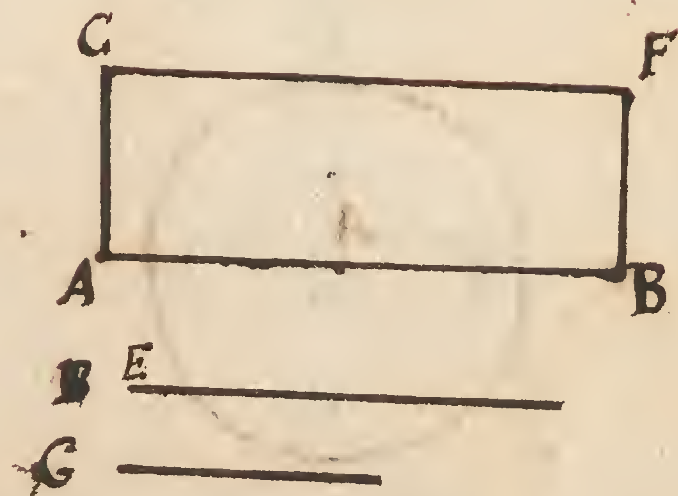
Superficiales vero mensuræ sunt ex qua=dratis, vel ex rectangulis mensurarum

linearium, ut pertica quadrata, exapeda quadrata, pes quadratus, uncia quadrata &c:

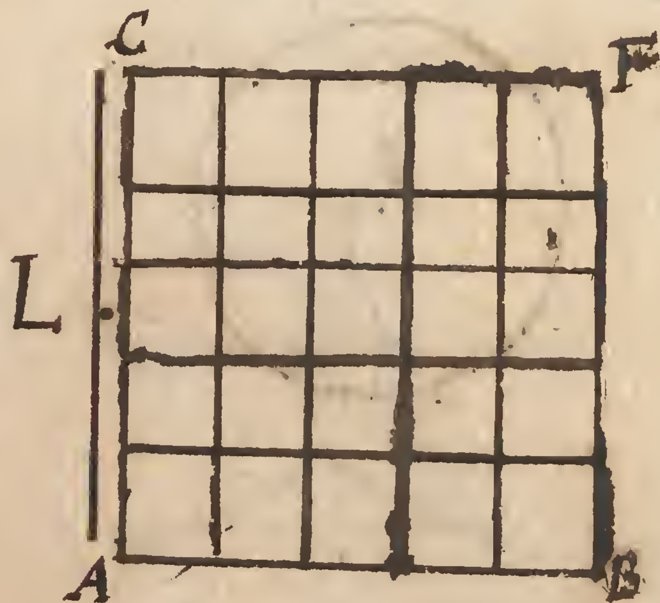
Item pes superficialis perticæ quadratæ, qui est duodecima pars ejusdem perticæ quadratæ, sive est rectangulum, cujus basis est longitudo unius perticæ, et altitudo est unius pedis eliprandi; Uncia perticæ quadratæ, quæ est rectangulum unius perticæ longitudinis, et unius unciæ linearis latitudinis. Idem intel=ligatur de pede exapedæ quadratæ, de uncia exapedæ quadratæ &c:.

Definitio trigesima septima.

Rectangulum ACFB contentum a lineis AB, AC ita indicatur AB X AC quadratum vero rectæ AB sic indicatur $\overline{AB}^2$. Præterea si linea E fuerit æqualis lateri AB rectanguli ACFB, et linea G fuerit æqualis lateri AC, tunc rectan=gulum AF etiam contineri dicitur a rectis FG



similiter si recta L fuerit æqualis lateri AB quadrati ABFC, tunc idem quadratum erit pariter quadratum rectæ lineæ L.



Postulatum primum

Ex dato puncto ad aliud punctum datum rectam lineam ducere.

Postulatum secundum

Data recta linea terminata in

directum, et indefinite producere.

Postulatum tertium.

Dato centro, et intervallo, seu radio circulum describere.

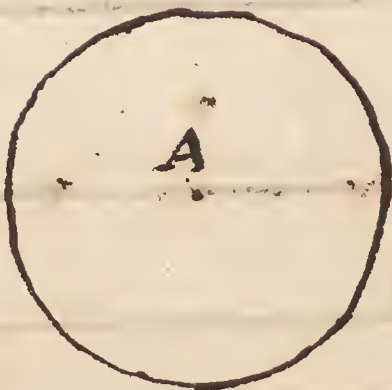
Scholium.

Axiomatis tredecim antea traditis in libro 2 elementorum Aritmetices uni:versalis N. 103, 104 &c. adjungenda sunt quae sequuntur.

Axioma decimum quartum.

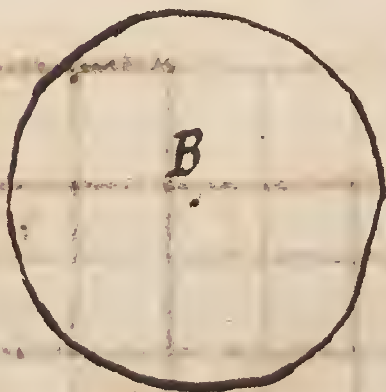
Quae mutuo superimposita congruunt sunt aequalia inter se

Ut si circulus A super imponatur circulo B, et posito centro circuli A supra centrum circuli B, tunc duo circuli mutuo congruent, atque erunt aequales inter se, ut evidens est.



Similiter omnes circuli habentes radios aequales si mutuo superimponantur congruere debent, et aequales esse, ut ex ipsa circuli definitione patet.

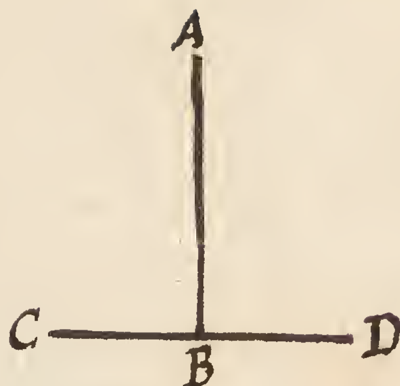
Praeterea omnes rectae lineae aequales mutuo superimpositae congruunt. Item omnes anguli rectilinei aequales, si mutuo superimponantur congruere debent, ut ex definitione quinta, et septima deduci potest immediate.



Axioma decimum quintum

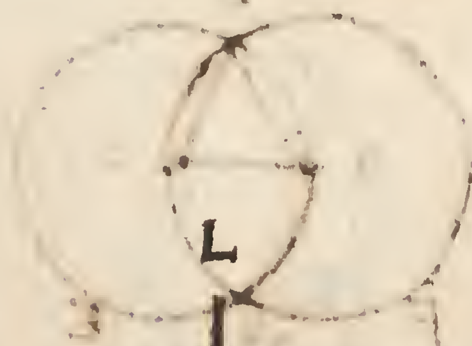
Si fuerit totum duplum totius, et ablatum duplum ablati, etiam reliquum reliqui duplum erit.

Sit numerus 24 duplum numeri 12, et ex toto 24 auferatur numerus 10, duplus numeri 5, qui auferatur ex toto 12; etiam reliquum 24−10 duplum erit reliqui 12−5 idest residuum 14 duplum erit residui 7



Axioma decimum sextum

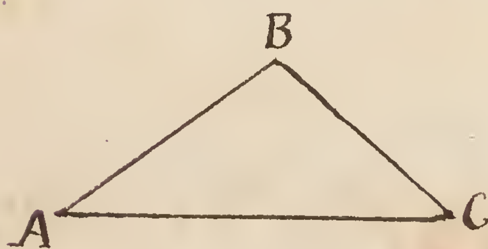
Omnes anguli recti sunt aequales inter se. Sint rectae AB, LG perpendiculares rectis CD EF, anguli recti in B aequales erunt angulis rectis in G nam si recta CD superimponatur rectae EF, ita ut punctum B cadat supra punctum G, tunc perpen=dicularis BA necessario coincidet cum perpendiculari GL, alioquin si hinc vel inde a perpendiculari G deflecteret esset obliqua, quod est contra hypotesim, consequenter (axiom: 14) anguli recti in B erunt aequales angulis rectis in G





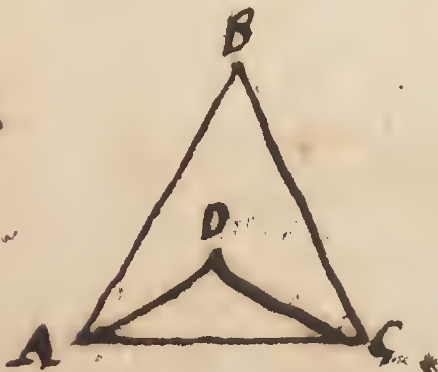
Axioma decimum septimum.

Duo latera cujusvis trianguli rectilinei simul sumpta, reliquo sunt majora. Ut in triangulo ABC evidens est duo quaelibet latera, exempli causa AB, et BC, simul sumpta majora seu longiora esse reliquo latere AC. Est prop: 20 libri 1 Euclidis.



Axioma decimum octavum.

Si ab extremis (A, et C) unius lateris (AC) cujusvis trianguli rectilinei (ABC) ad punctum aliquod (D) intra ipsum triangulum ducantur duae rectae



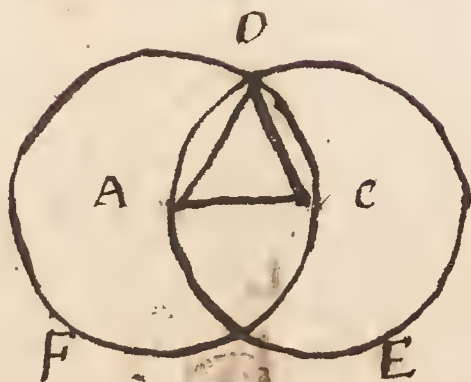
linea (AD, CD) ipsa simul sumptae minores erunt reliquis duobus dati trianguli lateribus (AB, CB) simul sumptis, nimirum semita ex A per D ad C, minor est, quam semita ex A per B ad C.

Est prima pars prop: 21 libri 1 Euclidis.

Propositio prima

Problema 1.

Super data recta linea terminata triangulum aequilaterum describere.



Data sit recta AC terminata in punctis A, et C, et supra eandem rectam constituendum sit triangulum aequilaterum.

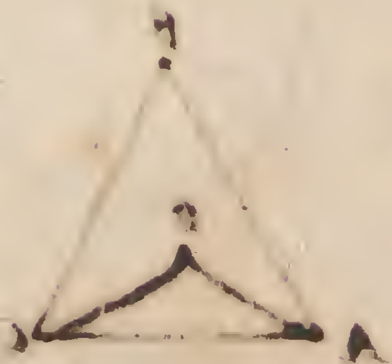
Constructio

Ex centro A, et intervallo, seu radio AC (postula: 3) describatur circulus CDF. Similiter ex centro C, et eodem intervallo CA describatur alius circulus ADE, cujus peripheria alicubi secabit peripheriam alterius circuli, ut in puncto D, ex quo ad puncta A, et C (postu: 1) ducantur duae rectae lineae DA, DC, dico triangulum ADC esse aequilaterum.

Demonstratio

Rectae AD, AC, (constructione) sunt radii ejusdem circuli DFC; ideoque (defini: 15) erit AD=AC.

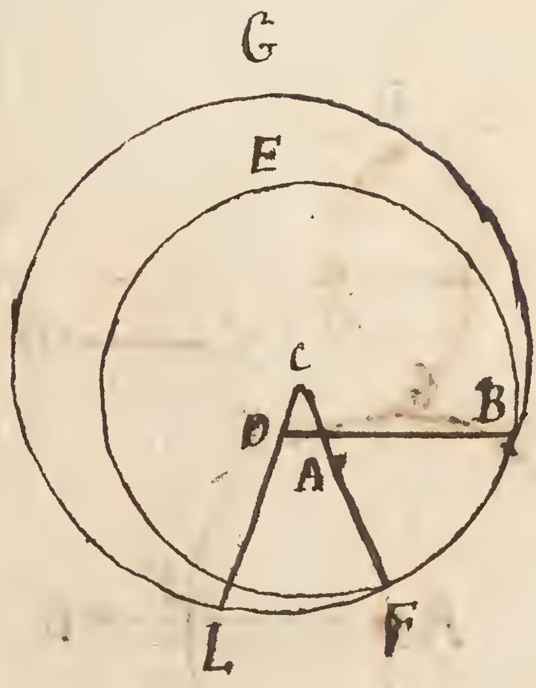
Similiter est CD=CA, quia sunt radii ejusdem circuli ACD: ergo (axiom: 1) erit AD=CD, quia ambae ostensae sunt aequales ejusdem rectae AC.



Itaque tres rectæ AD, AC, CD, sunt æquales inter se, consequenter (defin: 19) triangulum ADC erit æquilaterum: Ergo super data recta terminata constitutum est triangulum æquilaterum. Quod erat faciendum, et demonstrandum. Est prop: 1 libri 1 Euclidis.

Propositio secunda
Problema.

Ex dato puncto rectam lineam ducere æqualem datæ rectæ terminatæ. Data sit recta terminata AB, et datum sit punctum D, ex quo ducenda sit recta linea æqualis datæ AB.



Constructio.

Centro A intervallo AB (postulatum 3) describatur circulus AFE, deinde a puncto D ad punctum A (postul: 1) du Ducatur recta DA, super recta DA propositionis antecedentis. Cujus latus BA (postul: 2) producatur usque ad peripheriam in F. Postea centro C radio CF (postul: 3) describatur alius circulus FGL. Tandem producatur latus CD usque ad peripheriam hujus circuli in L, erit DL quæsita linea.

Demonstratio.

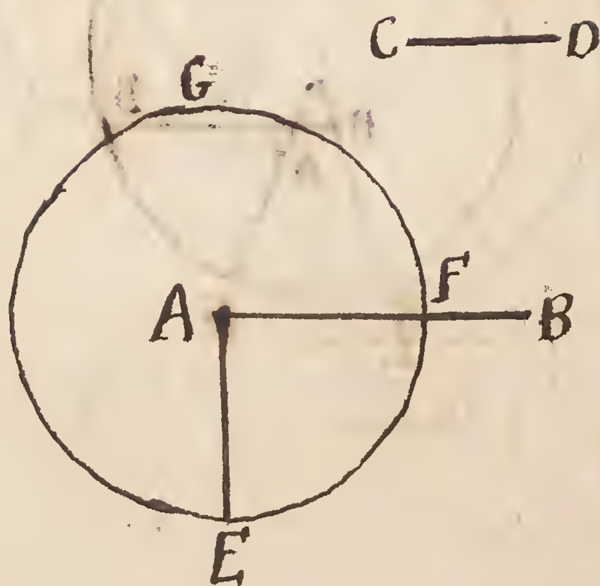
Triangulum CDA per constructionem est æquilaterum; igitur (defin: 19) erit latus CD = CA. Præterea (defin: 15)

est CL = CF, quia sunt radii majoris circuli FCL. Itaque ab aequalibus lineis CL, CF auferantur aequales partes CD, CA, et (axiom: 3) remanebit DL = AF, atque (defin. 15) est pariter AB = AF (sunt enim radii circuli minoris FBE) ergo (axiom 1) erit DL = AB.

Quapropter ex dato puncto ducta est recta linea aequalis datae rectae terminatae. Quod erat propositum. Est prop. 2 libri 1 Euclidis.

Propositio tertia
Problema

Datis duabus rectis lineis inaequalibus, de majore partem absscindere aequalem minori. Dato sint duae rectae inaequales, AB, major, et CD, minor, atque ex majori AB auferenda sit pars aequalis minori CD.



Constructio

Ab extremo puncto A majoris ABC (propositione antecedenti) ducatur recta AE aequalis minori CD. Deinde centro A, et radio AE (postul. 3) describatur circulus EFG, cujus peripheriam alicubi secabit, lineam AB (quia AB major est CD, seu radio AE), ut in puncto F dico AF esse quaesitam portionem aequalem minori CD.

Demonstratio

Omnes radii ejusdem circuli (definit: 15) sunt aequales inter se, erit radius AF aequalis radio AE; sed per constructionem AE=CD, ergo (axiom: 1) erit AF aequalis CD. Consequenter ex data recta majori abscissa est portio aequalis datae rectae minori. Quod erat propositum.
Est propositio 3 libri 1 Euclidis.

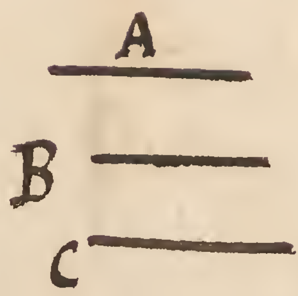
Propositio quarta
Problema.

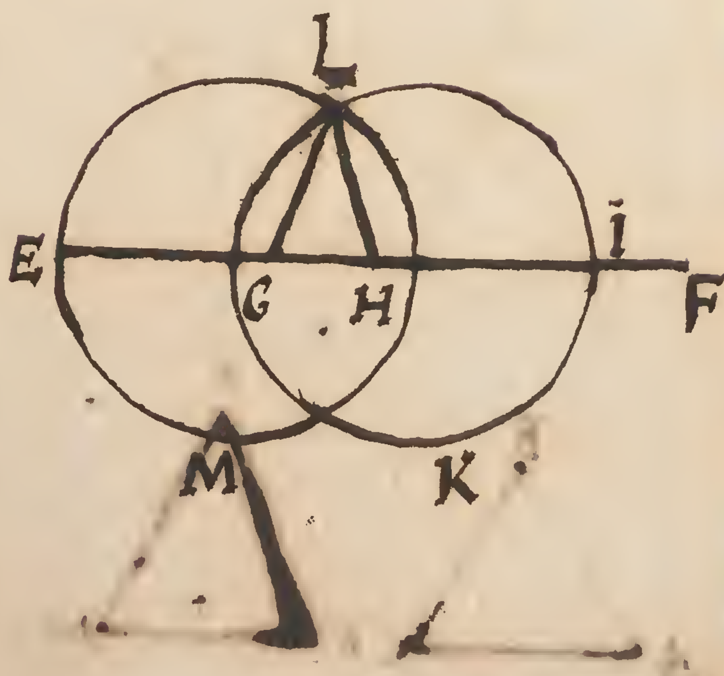
Datis tribus rectis lineis terminatis quarum duae quomodocumque sumtae reliquam excedant, super ipsarum una triangulum constituere habens duo reliqua latera, reliquis duabus, datis rectis lineis aequalia.

Datae sint tres rectae lineae CH, A, C, quarum duae omnifariam sumtae, reliqua sint majores (axiom: 17.), atque supra GH describendum sit triangulum cujus reliqua duo latera sint aequalia lineis A, et C, singula singulis.

Constructio.

Recta terminata GH (postul: 2) utrinque producatur versus E, et F, indefinita, deinde (proposi: ante:) secantur partes GE aequalis lineae A, et HI aequalis lineae C, postea centro G, intervallo GE (postul: 3) describatur circulus ELM, et centro H, radio HI describatur alius circulus





MIK Tandem ex puncto M in quo peripheria sese mutuo secant ad puncta G et H (postulato 1.) ducantur recta LG LH erit L GH quaesitum triangulum.

Demonstratio

Latus GL est aequale recta GE (defin: 15), sed recta GE (construc:) est aequalis recta A, ergo (axio:1) erit latus GL aequale recta A eadem ratione (defin: 15) est HL = HI, et (construc:) HI = C ideoque (axio: 1) erit latus HL aequale recta C. Conse=quenter supra GH, constitutum est triangulum GLH, habens reliqua duo latera GLH aequalia reliquis datis rectis lineis A, et C quod erat docendum, et demonstrandum

Est proposi: 22 libri 1 euclidis.

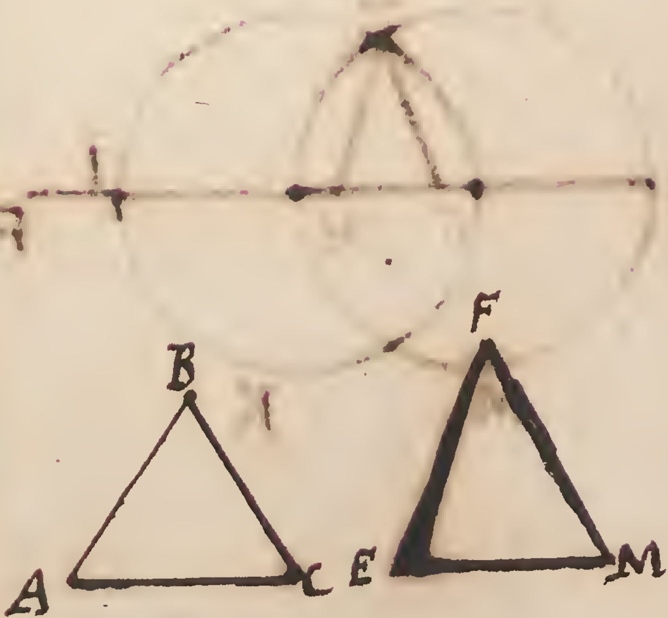
Corolarium.

Si omnes tres datae rectae lineae fuerint aequales inter se descriptum triangulum (defin: 19.) erit aequilaterum. si duae tantum aequales sint inter se (defin:20) triangulum erit hisosceles, si autem omnes tres fuerint inaequales, triangulum descriptum (defin: 21) erit schalenum

Propositio 4

Theorema

Si duo triangula habuerint duos angulos duobus angulis aequales



alterum alteri, et latus aequale lateri interposito inter angulos aequales, erunt reliqua latera reliquis lateribus aequalia, reliquus angulus reliquo angulo aequalis, et triangulum trian=:gulo aequale erit.

Duo triangula ABC, EFM habeant angulum A aequalem angulo E, angulum C aequalem angulo M, et latus AC aequale lateri EM; ostendendum est latus AB aequale esse lateri EF, latus BC aequale FM, quae aequalibus angulis opponuntur. Angulum B aequalem esse angulo F, et triangulum ABC, aequalem esse triangulo EFM

Demonstratio

Intelligatur triangulum ABC, ita superimponi triangulo EFM, ut punctum A cadat supra punctum E, et latus AC, supra aequale latus EM; punctum C cadet in M, et mutuo congruent haec duo latera aequalia (6 cor. defin. 1). Cum autem ex hypotesi angulus A sit aequalis angulo E latus AB necessario cadet supra latus EF. similiter quia est angulus C aequalis angulo M latus CB cadet supra MF. Consequenter punctum B commune duobus lateribus AB, CB, cadet supra punctum F commune duobus

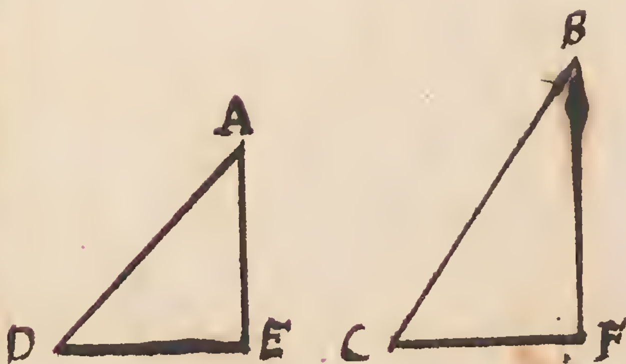


lateribus EF, FM, et triangulum ABC perfecte congruet cum triangulo EFM; ergo (axiom: 14) erit latus AB aequale lateri EF, latus BC aequale FM, angulus B aequalis angulo F et triangulum, seu area ABC aequalis erit areae trianguli EFM

Quapropter si duo triangula habuerint duos angulos duobus angulis aequales utrumque utrique, et latus aequale lateri intercepto inter angulos aequales, etiam reliqua reliquis aequalia habebunt. Quod erat demonstrandum. Est prima pars prop: 26 libri I Euclidis.

Propositio sexta
Theorema.

Si duo triangula habuerint angulum aequalem angulo, et latera aequales angulos efficientia aequalia inter se utrumque utrique etiam basis aequalis erit basi, triangulum aequale triangulo, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, quibus aequalia latera subtenduntur.



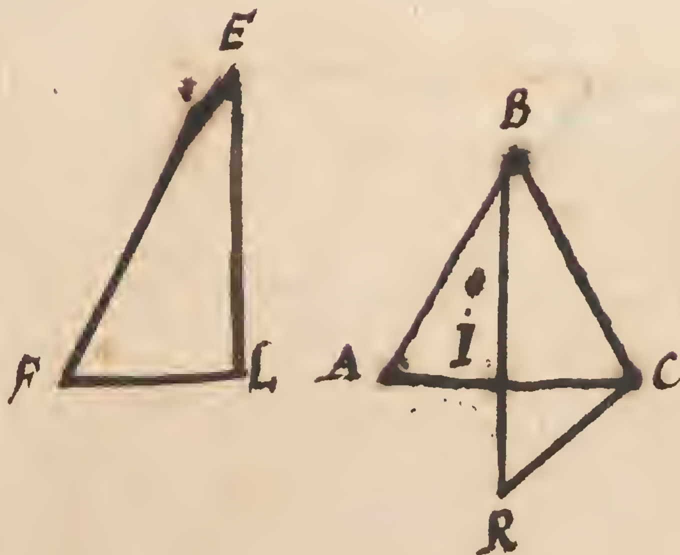
Duo triangula ADE, BCF habeant angulum A aequalem angulo B latus AB=BC, et latus AE=FB dico basim DE aequalem esse basi CF, triangulum ADE aequalem esse triangulo BCF, angulum B=C, et angulum E aequalem esse angulo F,

quibus opponuntur latera aequalia.
Demonstratio

Triangulum ADE ita superimponatur triangulo BCF, ut punctum A cadat supra punctum B et latus AD cadat supra aequale latus BC; punctum D necessario cadet in C quia, ex hypotesi, est latus AD=BC. Praeterea, quia angulus A est aequalis angulo B. (hypotesi) latus AE cadet supra BF et punctum E cadet in F, quia est latus AE=BF ex hypotesi; ideoque recta DE (cor: defin: 5) congruet cum recta CF (quia ex demonstratis puncta D, et E, cadunt in C, et F), et triangulum ADE congruet cum triangulo BCF, angulus D cum angulo C, et angulus E cum angulo F: consequenter (axi: 14) erit basis DE aequalis basi CF, triangulum ADE aequale triangulo BCF, angulus B=C, et angulus E=F.
Ergo si duo triangula habuerint &c. quod erat ostendendum.
Est prop: 4 libri 1 Euclidis.

Propositio septima
Theorema

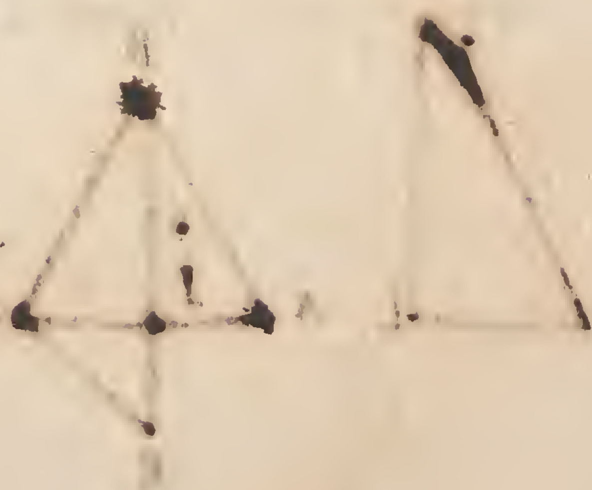
Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus aequalia, utrumque utrique, et angulum majorem angulo a lateribus aequalibus contento habebunt etiam basim majorem basi.

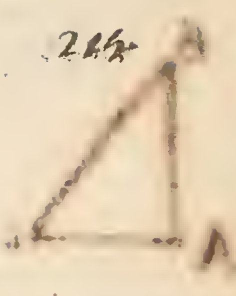


Duo triangula ABC BFL habeant latus
AB=FE, latus BC=EL, et angulum
ABC majorem angulo E, dico basim AC
oppositam majori angulo, majorem esse
basi FL, quae subtendit angulum minorem.
Concipiatur triangulum EFL ita superimponi
triangulo ABC, ut punctum E cadat in
B et latus EF supra aequale latus
BA extendatur, punctum F necessario
cadet in A ob aequalitatem laterum
EF, BA: praeterea, quia ex hypotesi
angulus E minor est angulo ABC,
latus EL cadet infra BC, ut in BR,
et latus FL in AR.

Demonstratio

In triangulo IBC (axiom: 17), duo
latera BI, IC simul sumta, sunt
majora reliquo BC, sed ex hypotesi
est latus BC=EL, et per constructionem
est latus BR=EL: ideoque (axio: 1)
erit latus BR=BC: consequenter
duo latera BI, IC, quae ostensa
sunt majora BC (secunda parte axio: 1)
erunt etiam majora BR; sed (axio: 11)
est BR=BI+IR, igitur duo latera
BI, et IC, quae, ex demonstratis, sunt
majora BR (secunda parte axiom: 1)
erunt etiam majora duobus BI et IR
atque ab inaequalibus summis BI+IC
major, et BI+IR minor, auferendo
communem partem BI (axiom: 7)



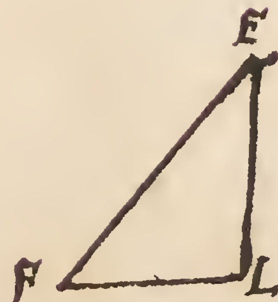



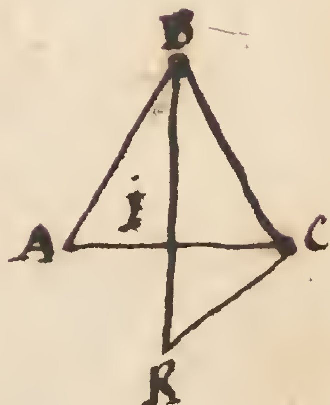
remanebit IC major recta IR, quibus addatur communis portio IA, et (axio:5) erunt duae rectae IC, et IA simul majores duabus IR, IA simul sumtis; nimirum IC+IA, idest (axio: 11) tota recta AC major erit duabus IR, IA; sed duae IR, IA, in triangulo IAR (axiom: 17) sunt majores reliqua AR; ergo (axio: 13) etiam recta AC erit major recta AR. est autem AR= FL per constructionem; ergo (secunda parte axio: 1) erit pariter AC major FL.

Quapropter si duo triangula &c. quod erat demonstrandum

Est prop: 24 libri 1 Euclidis

Scholium





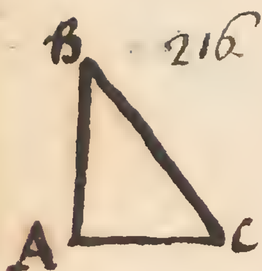
Quando latus AB est majus latere BC, seu FE majus EL, hinc in constructione hujus propositionis posito puncto E in B ostenderetur latus BL supra latus aequale BC sive quod idem est transferantur literae A in C, et C in A, item F in L, et L in F, ut casus diversi ab antecedente non occurrant, et alia demonstratione opus non sit.

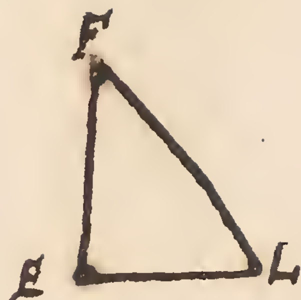



Propositio octava

Theorema

Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus aequalia, alterum alteri, et basim majorem basi habebunt pariter angulum majorem angulo a lateribus aequalibus contento.





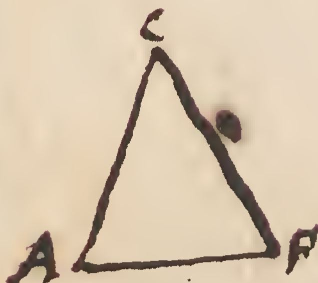
Duo triangula ABC, EFL habeant
latera æqualia AB=FE, BC=EL, et
basim AC majorem basi FL: dico
angulum B majorem esse angulo E.

Demonstratio.

Etenim si angulus B esset æqualis
angulo E, quia (hypotesi) est BA=EF,
et BC=EL, nunc (prop: 6) etiam basis
AC æqualis esset basi FL, quod est
contra hypotesim: si autem angulus
B esset minor angulo E, nunc (prop. ante:)
etiam basis AC minor esset basi FL,
quod est pariter contra hypotesim.
Ergo angulus B major erit angulo
E, quia ex demonstratis non potest
esse æqualis nec ipso minor.
Quapropter si duo triangula etc.
Quod erat ostendendum.
Est proposi: 25 libri 1 Euclidis.

Propositio nona

Theorema





Si duorum triangulorum singula latera singulis
lateribus æqualia fuerint etiam singuli anguli
singulis angulis æquales erunt, quibus
æqualia latera subtenduntur, et
triangulum triangulo æquale erit.
Data sint duo triangula ACF, BEL
quæ habeant latus AC=BE, latus
CF=EL, et basim AF=BL, ostendendum
est angulum C æqualem esse angulo
E, angulum A=B, angulum F=L, qui
subtenduntur a lateribus æqualibus,

et triangulum ACF aequale triangulo
ELB

Demonstratio.

Quoniam ex hypotesi, duo latera AC, CF sunt aequalia duobus lateribus EB, EL, alterum alteri, si angulus C non esset aequalis angulo E, sed ipso major vel minor, tunc (prop. 7) etiam basis AF, major vel minor esset basis BL, quod est contra hypotesim, cum igitur sit basis AL aequalis basi BL necesse est ut angulus C sit aequalis angulo E, ipsi autem anguli C, et E, demonstrati aequales (hypotesi) continentur a lateribus aequalibus, ergo (prop. 6) erit etiam angulus A aequalis angulo B, angulus F aequalis angulo L, quibus opponuntur aequalia latera, et triangulum ACF, erit aequale triangulo EBL.

Quapropter si duorum triangulorum. Quod erat demonstrandum.

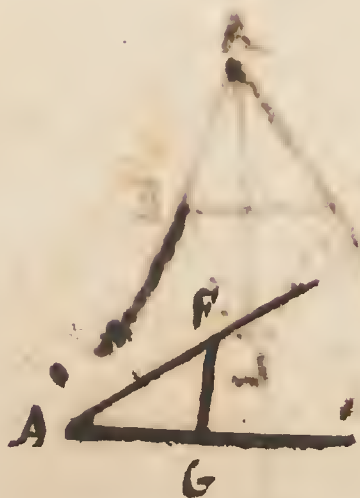
Est prop. 8 libri 1 Euclidis.

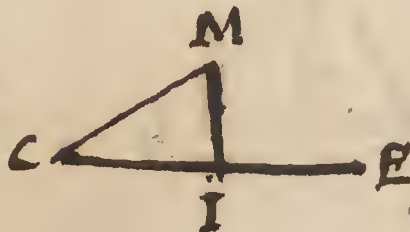
Propositio decima

Ad data Problema

Ad datam rectam lineam indefini:
:tam, et ad punctum in ea datum angulum rectilineum constituere, aequalem dato angulo rectilineo.

Datus sit angulus rectilineus A, et data sit recta CE, et punctum in ea C,





oportet ad rectam CE, et in puncto C angulum rectilineum constituere aequalem angulo dato A.
Ducatur recta FG, quae jungat duo qualibet puncta laterum AF, AG;
Deinde ex indefinita CE (prop: 3) secetur pars CI aequalis lateri AG, et supra CI (prop: 4) describatur triangulum CMI, cujus latus CM sit aequalis lateri AF et latus MI aequale lateri FG trianguli AFG erit MCI quaesitus angulus.

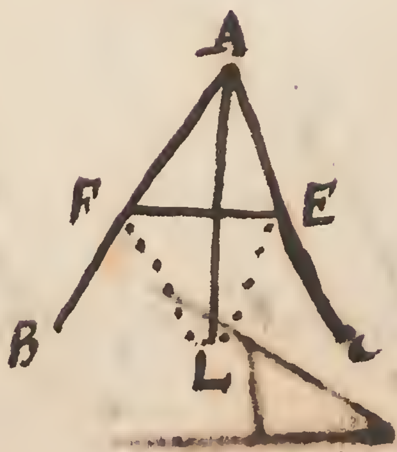
Demonstratio.

Triangula CMI, AFG (constructione) habent latera aequalia CI=AG, CM=AF, et MI=FG; ergo (prop: ante:) erit angulus MCI aequalis dato A quibus opponuntur aequalia latera MI, FG
Itaque ad datam rectam lineam &c.
Quod erat faciendum, et demonstrandum.
Est prop: 23 libri 1 Euclidis.

Propositio undecima

Problema

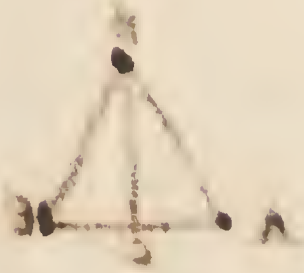
Datum angulum rectilineum, bifariam dividere.
Angulus rectilineus CAB dividendus sit bifariam, hoc est in duos angulos aequales.
In latere AB sumatur quodlibet punctum F, et ex altero latere AC indefinite producto versus C (prop: 3)



secetur pars AE aequalis parti AF, et (postu: 1) jungatur recta FE, supra quam (prop: 1) describatur triangulum aequilaterum ELF deinde a puncto L ad punctum A (postu: 1) ducatur recta LA quae datum angulum CAB, bifariam secabit, idest in duos aequales angulos CAL, LAB

Demonstratio

Duo triangula AEL ALF habent latus commune AL, latus AE (ex constructione) aequale lateri AF, et latus FG (defin: 19) aequale lateri GE, ergo (prop: 9) erit angulus EAG aequalis angulo GAF, quibus opponuntur aequalia latera GE, GF, duo autem anguli EAG, GAF (actio 11) constituunt totum angulum aequale CAB ergo datus angulus CAB, bifariam divisus est, quod erat propositum. Et est proposi: 9 libri 1 Euclidis



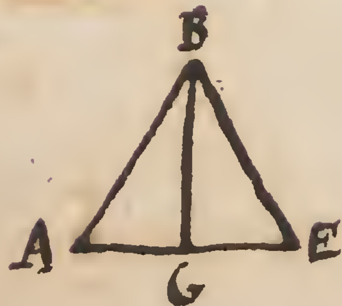
Propositio duodecima

Problema:

Datam rectam lineam determinatam bifariam dividere.

Sit data recta AE terminata in punctis AE, quae dividenda sit in duas partes aequales inter se

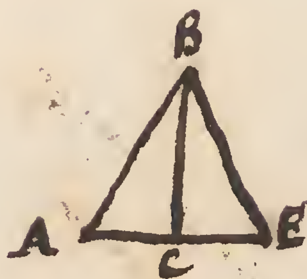
Super data recta AE (prop: 1) describe triangulum aequilaterum ABE, deinde (prop: ante:) bifariam divide angulum



BAE per rectam BC quae datam AE secet in aliquo puncto C, dico rectam AE bifariam divisam esse in C, erit nempe AC=CE

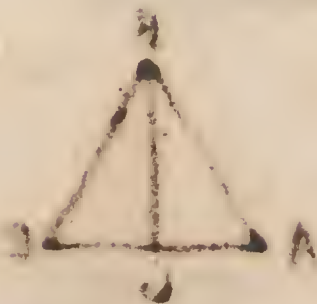
Demonstratio.

Duo triangula ABC, BCD habent latus BC commune, et (defin: 19) latus AB=BE, praeterea (constructione) habent angulum ABC contentum a lateribus AB, BC, aequalem angulo CBE contento a lateribus EB, BC, consequenter (prop: 6) habebunt etiam basim AC aequalem basi CE, quae simul (axiom: 11) adaequant totam AE, ergo data recta terminata divisa est bifariam. quod erat docendum, et demonstrandum. Est prop: 10 libri 1 Euclidis.



Corrolarium

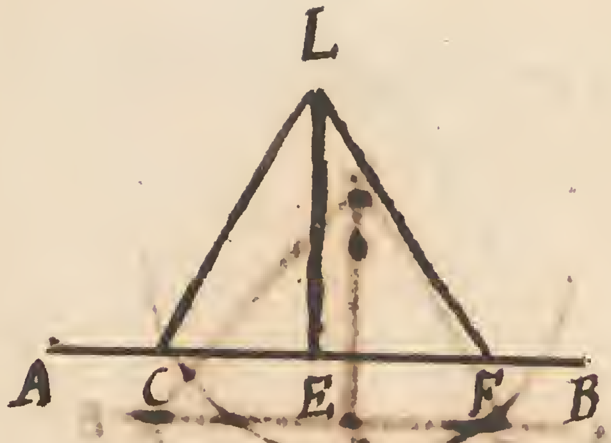
Praeterea in triangulis ABC, BCE (prop: 6) erit etiam angulus ACD aequalis angulo BCE, quibus oppo=
=nuntur aequalia latera AB, BE, sed duo anguli aequales BCA, BCE sunt anguli consequentes, proindeque (defin: 9) erunt ambo recti, et BC erit perpendicularis ad AE. ergo recta, BC, bifariam dividens angulum ABE contentum a lateribus aequalibus AB, BE, non solum bifariam dividit latus, AE eidem angulo oppositum, sed est etiam perpendicularis ad idem latus. Quae omnia



verificantur etiamsi triangulum AB, non sit aequilaterum, sed hiscosceles, cujus duo latera inter se aequalia sint AB, et AE, quia eadem erit demonstratio.

Propositio decima tertia
Problema

Ad datam rectam lineam, et ex puncto in ea dato, perpendicularem lineam erigere.



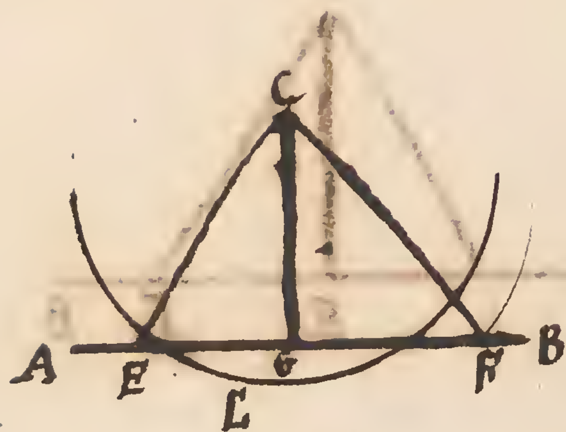
Data sit recta AB, et in ea datum sit punctum C, ex quo erigenda sit recta perpendicularis ad lineam datam AB.

In parte CA notetur aliquod punctum E, habebitur recta terminata CE: deinde ex alia parte CB indefinite producta (prop: 3) secetur pars CF=CE, atque supra totam EF (prop: 1) constituatur triangulum aequilaterum ELF; tandem a puncto L ad punctum datum C (postu: 1) ducatur recta LC; quae erit quae=sita perpendicularis.

Demonstratio

Duo triangula LCF, LCE habent (construc:) latus CF=CE latus CL commune (defin: 19) latus LF=LE; ergo (prop: 9) erit angulus LCF aequalis angulo LCE, quibus oppo=nuntur latera aequalia LF, LE; conse=quenter (defin: 9) recta LC erit perpendicularis recte CF, seu AB: quod erat propositum est prop: 11 libri 1 euclidis.

Scholium



Quando datum punctum est extremum lineæ datæ, tunc (postu: 2) indefinite producatur data recta, et reliqua fiant, ut antea.

Propositio decima quarta
Problema.

Ad datam rectam lineam indefinitam atque ex puncto extra ipsam dato, perpendicularem lineam demittere.

Data sit recta indefinita AB, et extra ipsam datum sit punctum C ex quo ducenda sit recta linea perpendicularis ad datam AB. Ex altera parte datæ lineæ AB sumatur quodlibet punctum L, et centro C, radio CL, describatur circulus, vel arcus EL[redacted]F, qui secet datam rectam in duobus punctis E, et F, postea subtensa EF (prop: 12) bifa=riam dividatur in G, et (postu: 1) ducatur recta CG, quæ erit quæsita perpendicularis. Jungantur radii CE, CF

Demonstratio

Triangula CGF, CGE habent latus commune CG, et (construct:) latus GF=GE, latus vero GF=GE (defin: 15); ideoque (prop: 9) erit angulus CGF æqualis angulo CGA consequenter (defin: 9) recta CG erit perpendicularis ad rectam EF, seu AB.

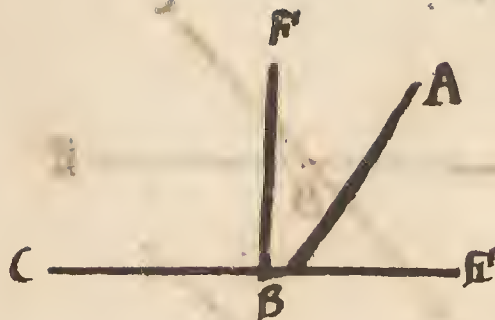
Ergo ad datam rectam etc.

Quod erat docendum, et demonstrandum

Est prop: 12 libri 1 Euclidis.

Propositio decima quinta
Theorema

Recta linea super aliam rectam insistens, duos angulos consequentes, vel rectos facit, vel duobus rectis aequales.



Recta linea AB: insistat supra rectam CE, efficiet duos angulos consequentes ABC, ABE, qui (defin: 9) erunt ambo recti, si recta AB perpendiculariter cadat supra CE.

Si autem recta AB oblique cadit supra CE, duo anguli obliqui ABC, ABE simul sumti duobus rectis aequales erunt.

Supra rectam CE, et ex puncto in ea B (prop: 13) erigatur perpendicularis FB.

Demonstratio.

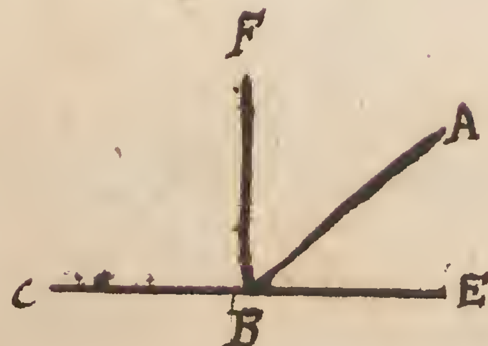
Duo anguli FBC FBE (defin: 9) sunt ambo recti; angulus vero obtusus ABC, excedit rectum FBC per angulum FBA, et angulus acutus ABE deficit a recto FBE, per eundem angulum FBA. Quapropter ab angulo obtuso ABC auferatur pars FBA, relinquetur angulus rectus FBC angulo vero acuto ABE addatur angulus FBA demtus ex obtuso, et (axio: 11) formabitur alter rectus FBE; ergo duo anguli consequentes ABC, ABE simul sumti, duos rectos adaequant.

Quod erat ostendendum.

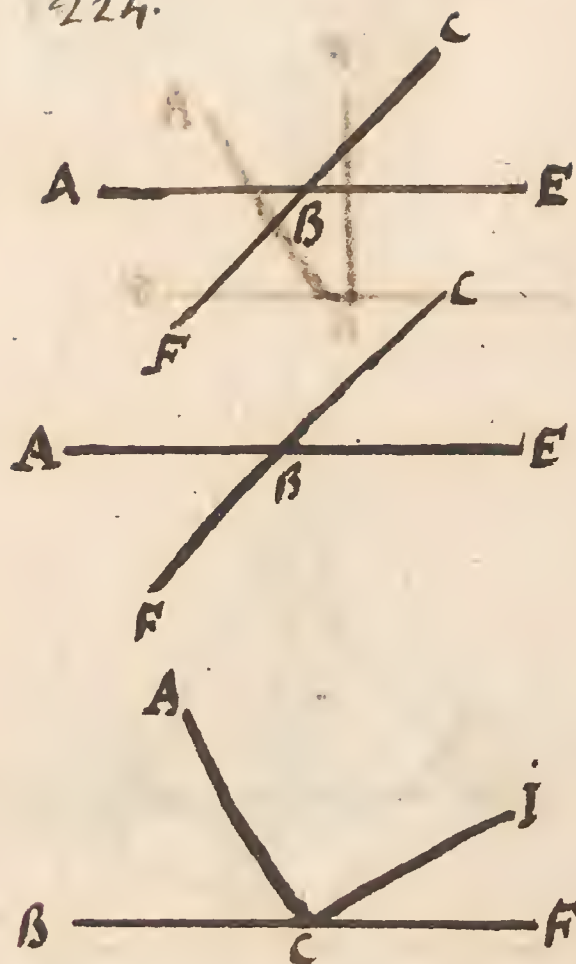
Est prop: 13 libri 1 Euclidis

Corrolarium primum.

Hinc omnes anguli CBF, FBA, ABE &c, qui fieri possunt in puncto B a quotcunque lineis concurrentibus ex eadem parte lineae CE, simul sumti, semper duos rectos adaequant.



Corrolarium secundum



Praeterea quatuor anguli, qui fiunt in B a duabus rectis AE, CF se mutuo secantibus in B, quatuor angulis rectis aequales erunt

Corrolarium tertium

Consequenter si ad idem punctum B concurrant quotcumque lineae rectae ex utraque parte lineae AE, omnes anguli, qui ab illis rectis efficientur in B, simul sumti (axio: 11) quatuor angulis rectis aequales erunt

Propositio decima sexta

Theorema

Si ad punctum aliquod in data recta ex oppo:
:sitis partibus concurrant duae lineae rectae quae efficiant duos angulos consequentes duobus rectis aequales; illae duae rectae lineae in directum positae erunt, hoc est, unicam rectam lineam component
Sit recta AC, et ad punctum in ea C ex oppositis partibus ductae sint duae rectae BC, FC, quae efficiant duos angulos consequentes ACF, ACB duobus rectis aequales, dico recta BC, FC, in directum positas esse, seu unicam rectam BF constituere

Demonstratio

Etenim, si fieri potest recta CF non sit in directum posita cum recta BC, sed alia recta CI in directum jaceat cum eadem recta BC; atque tunc recta AC insistens supra rectam BCI (prop: ante:) efficiet duos angulos ACB, ACI, simul sumtos duobus rectis aequales; sed ex hypotesi duo anguli ACB, ACF, simul sumti sunt etiam aequales duobus rectis: ergo (axio: 1) duo anguli ACB, ACF erunt aequales duobus ACB, ACI,

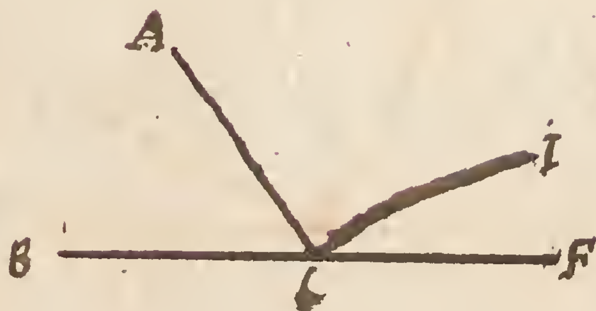
et dempto communi angulo ACB (axio: 3) remanebit angulus ACF aequalis angulo ACI, idest totum aequale parti, quod (axio: 10) repugnat; ergo nulla alia recta linea, nisi CF in directum jacere potest cum linea BC, quando anguli consequentes ACB, ACF adaequant duos rectos.

Itaque si ad punctum aliquod in data recta &c. quod erat demonstrandum.

Est prop: 14 libri 1 Euclidis

Corrolarium

Quapropter duae rectae lineae nulla partem communem habere possunt, praeter unicum punctum in quo se invicem secant. Etenim si linea quantumvis minima CB esset pars communis duabus rectis IC, FC, sin tempe esset ICB linea recta, et FCB alia linea recta, tunc ducta ad punctum C recta AC, ut in antecedenti demonstratione esset angulus ACF aequalis angulo ACI, quod (axio: 10) fieri nequit; ergo linea CB quamvis minima non potest in directum jacere cum duabus lineis rectis CI, CF; consequenter duae rectae lineae nullum habere possunt segmentum commune.

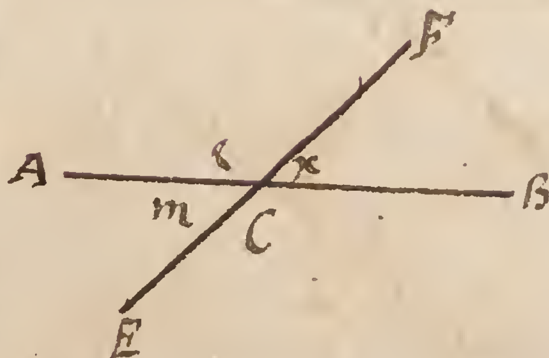


Propositio decima septima

Theorema

Duae rectae lineae se mutuo secantes efficiunt angulos ad verticem oppositos aequales inter se.

Duae rectae AB, FE, se invicem secent in puncto C, erit angulus x aequalis angulo ECB, et angulus m aequalis angulo z qui sunt ad verticem oppositi.



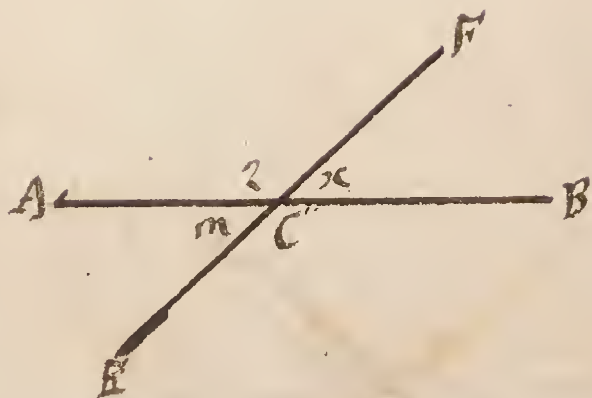
Demonstratio.

Recta AC incidens supra rectam FE (prop: 13) efficit duos angulos consequentes m, et x duobus rectis aequales eadem ratione recta FC cadens supra AB, efficit duos angulos consequentes z, et x duobus rectis aequales, consequenter (axio: 1) duo anguli m, et x simul aequales erunt duobus z, et x simul sumtis; et ab aequalibus summis m+x, et z+x auferendo communem angulum x (axio: 3) remanebit angulus m aequalis angulo z, idest ACE aequalis angulo FCB, qui sunt ad verticem oppositi. Praeterea duo anguli consequentes m, et BCE (prop: 13) adaequant duos rectos, consequenter (axio: 1) erunt etiam aequales duobus m, et x, qui pariter adaequant duos rectos (prop: 13) et auferendo angulum communem m (axio: 3) relinquetur angulus BCE aequalis angulo x, qui pariter sunt ad verticem oppositi; ergo dico recta linea quod erat ostendendum.

Est prop: 15 libri 1 Euclidis.

Corrolarium

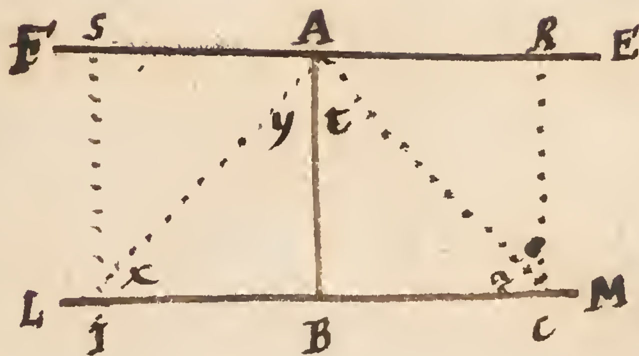
Si ex oppositis partibus, in lineam rectam AB inciderint ad idem punctum C, duae rectae FC, EC, quae angulos ad verticem oppositos ACE, FCE, aequales fecerint illae duae rectae FC, CE, in directum positae erunt. Si enim aequalibus angulis ACE FCB, addatur communis angulus ACF (axio: 2) duo anguli ACE ACF simul, aequales erunt duobus FCB, ACF simul sumtis, atqui duo anguli



consequenter FCB, ACF, (prop: 16) adaequant duos rectos, ergo (axio: 1) etiam duo anguli ACE, ACF duobus rectis aequales erunt; conse=quenter (prop: 16) duae rectae EC, CF in directum jacebunt.

Propositio decima octava
Theorema

Rectae lineae perpendiculares ~~habent~~ ad eandem rectam, sunt inter se parallelae.



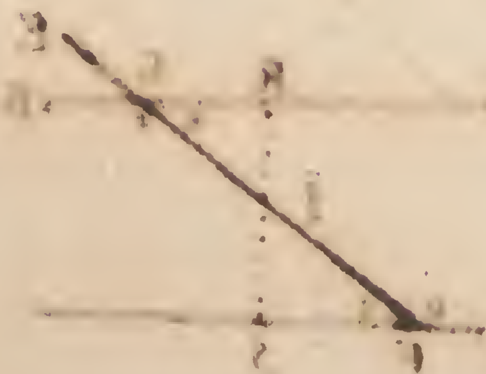
Duae rectae FE, LM sint ambae perpendiculares ad eandem rectam AB, dico rectas FE, LM esse parallelas.

In recta FE sumatur quodvis punctum S, ex quo (prop: 14) demittatur SI, perpendicularis rectae ML; deinde ex altera parte BM (prop: 3) secetur portio BC = BI, et ex puncto C supra lineam LM (prop: 13) eligatur perpendicularis CR, atque du=cantur rectae CA, IA

Demonstratio

Considerentur duo triangula ABC, ABI quae (construc:) habent latus BC = BI, latus BA utrique triangulo commune, et angulum ABC (axio: 16) aequalem angulo ABI, ergo (prop: 6) erit basis CA aequalis basi IA, angulus z = x, et angulus t = y, quibus subtenduntur latera aequalia.

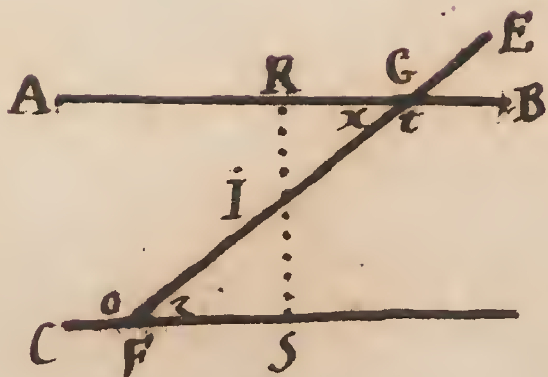
Praeterea ob lineas RC, SI (construc:) per=pendiculares ad rectam LM anguli recti RCB, SIB (axio: 16) sunt aequales, a quibus auferantur partes aequales, scilicet anguli



z, et x, aeque (axio 3) remanebit angulus ACR aequalis angulo AIS: similiter ab angulis RAB, SAB, ex hypotesi rectis, et (axio: 16) aequa=
=libus inter se, demantur partes (demons:) aequa=
=les, hoc est anguli t l y (axio: 3) remanebit angulus RAC, aequalis angulo IAS. Quapropter dico triangula ACR, IAS (demons:) habent duos angulos RCA, RAC aequales duobus angulis AIS, IAS, et latus interpositum AC aequale lateri interposito IA; ideoque (prop: 5) erit latus seu perpendiculum CR aequale lateri, seu perpendiculo IS, quae aequalibus angulis opponuntur, consequenter duae rectae FE, LM (defin: 11) erunt parallelae cum perpendiculares inter ipsas intercaptae IS, CR ostensae sint aequales inter se, quod semper verifi=
=catur, sive perpendiculares IS, CR, viciniores sint sive remotiores a recta AB.
Ergo rectae lineae perpendiculares. quod erat demon=
=strandum.

Propositio decima nona
Theorema.

Si recta linea supra duas rectas incidens, fecerit angulos alternos aequales inter se, vel angulum externum aequalem angulo interno et opposito, et ad eandem partem, vel duos angulos internos et ad eandem partem positos aequales duobus angulis rectis; illae duae rectae lineae erunt parallelae.
Primo recta GF oblique secet duas rectas AB, CL et efficiat angulum x aequalem angulo z (qui sunt interni, et oppositi, et vocantur anguli alterni) dico duas rectas AB, CL, esse parallelas.





Recta GL (prop: 12) bifariam secetur in puncto I ex quo, supra CL (prop: 14) demittatur perpendi=culum IS; deinde (prop: 3) ex recta indetermi=nata GA secetur portio GR=SF, et (postul: 1) jungatur recta IR.

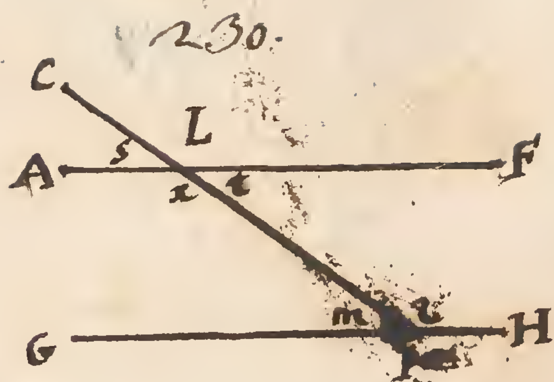
Demonstratio.

Triangula RGI, IFS habent (construc:) latus GI=IF et RG=SF (hypotesi) angulum x aequalem angulo z, qui fiunt a lateribus aequalibus; ergo (prop: 6) erit angulus RIG aequalis angulo opposito ad verticem SIF; consequenter (cor: prop: 16) rectae RI, IS, unicam rectam RS constituunt, praeterea erit angulus IRG aequalis angulo ISF, sed angulus ISF est (construc:) rectus; ideoque etiam angulus IRG (axio: 1) erit rectus: proindeque (defin: 9) recta RS erit perpendicularis ad rectam AB, et per constructionem est etiam perpendicularis ad rectam CL, consequenter (prop: antece:) lineae AB, CL erunt paralellae quia perpendicu=lares eidem rectae SR.

Si autem ponantur aequales inter se, duo anguli t, et o, qui pariter sunt alterni; tunc, quia (prop: 15) tam summa angulorum x+t, quam summa o+z adaequat duos rectos, ideo (axio: 1) erit x+t=o+z, et auferendo angulos t, et o ex hypotesi aequales (axio: 3) remanebit x=z consequenter per antecedentem demonstra=tionem lineae AB, CL erunt paralellae.

Ergo si recta linea supra duas rectas incidens, fecerit angulos alternos aequales, illae duae

230.



recta erunt parallelæ. Quod erat primum.

Secundo Recta CI supra duas rectas AF, GH insistens efficiat angulum externum s æqualem angulo m interno, et opposito ad eandem partem; rectæ AF, GH erunt etiam parallelæ

Demonstratio.

Angulus t (prop: 17) est æqualis angulo s ad verticem opposito. sed ex hypotesi angulus m est æqualis eidem angulo s; igitur (axiom: 1) erit angulus t, æqualis angulo alterno m; consequenter per antecedentem demonstrationem, rectæ AF, GH, erunt parallelæ.

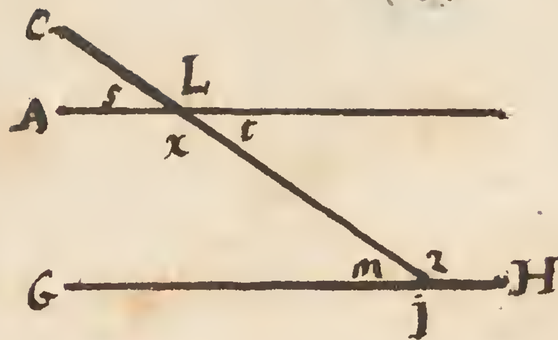
Eodem modo demonstratur rectas AF GH, esse parallelas, si ponatur angulus externus CLF æqualis angulo z interno et opposito, et ad eandem partem.

Quapropter si recta supra duas rectas incidens fecerit angulum externum, æqualem interno, et opposito, et ad eandem partem; ipsæ duæ rectæ erunt parallelæ. Quod erat secundum.

Tertio LI cadens supra rectas AF GH, efficiat angulos x, et m (vel t, et z) internos, et ad eandem partem positos, simul sumtos, æquales duobus angulis rectis, rectæ AF, GH, erunt parallelæ.

Demonstratio.

Duo anguli consequentes scilicet z, et m simul sumti (prop: 15) sunt æquales duobus rectis, sed, ex hypotesi, duo anguli m, et x sunt etiam æquales duobus rectis, ideoque (axiom: 1) duo anguli z, et m erunt æquales duobus x, et m,

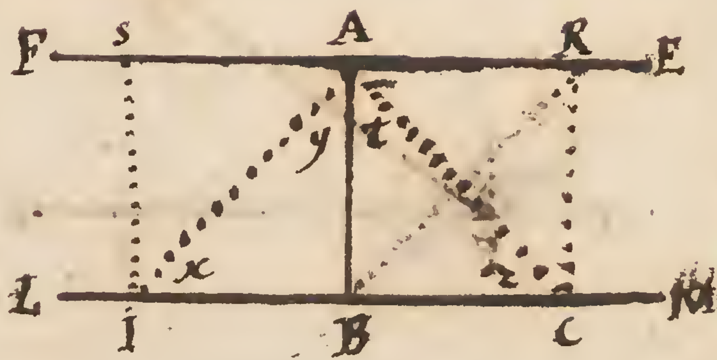


a quibus auferatur communis angulus m, et (axio 3) remanebit angulus z aequalis angulo altero x ergo per primam demonstrationem rectae AF, GH, erunt parallelae. Eodem ratiocinio de=monstrabitur lineas AF GH, esse parallelas, si alii duo anguli t, et z interni et ad eandem partem positi ponantur aequales duobus rectis; ergo si recta, supra duas rectas incidens effecit, duos angulos internos, et ad eandem partem positos, duobus angulis rectis aequales, illae duae rectae erunt parallellae seu aequidistantes Quod erat ostendum. Haec propositio continet propositiones 27, et 28 libri 1 Euclidis.

Propositio vigesima.

Theorema

Si recta linea supra duas parallellas incidens fuerit perpendicularis ad unam parallellarum, erit etiam perpendicularis ad alteram. Sint duae rectae parallelae FE, LM, supra quas cadat recta AB, quae sit perpendi=cularis ad rectam LM, dico eandem AB etiam perpendicularem esse ad rectam FE. Ex puncto B secentur partes aequales BI, BC, et (prop. 13) ad rectam LM, erigantur perpendiculares IS, CR, ducanturque IA, CA.



Demonstratio

Quoniam trianguli ABI, ABC, circa angulos (axio: 16) aequales, ABI, ABC habent latera aequalia BI = BC, et BA communem, ideo (prop. 6) erit basis IA

aequalis basi CA, angulus x=z, et angulus y=t, quapropter si ab aequalibus angulis rectis esse IB, RCB auferuntur anguli aequales x, et z (Axio: 3) remanebit angulus AIS, aequalis angulo ACR. Igitur duo triangula AIS, ACR habent angulum AIS=ACR (demonstr.), et latus IA=CA, latus vero SI (defin: 11) aequale lateri RC, quia sunt perpendiculares inter parallelas intercepta. Consequenter (prop: 6) erit angulus IAS aequalis angulo RAC, quibus adjunguntur anguli t, et y, ex demonstratis aequales, et (Axio: 2) erit totus angulus SAB aequalis integro angulo RAB, ideoque (defin: 9) recta BA, erit etiam perpendicularis ad rectam FE; quod erat demonstrandum

Propositio vigesima prima

Theorema

Recta linea supra duas parallelas oblique incidens, efficiet angulos alternos aequales inter se, angulum externum aequalem interno, et opposito, ad eandem partem, et duos angulos internos, et ad eandem partem positos duobus angulis rectis aequales.



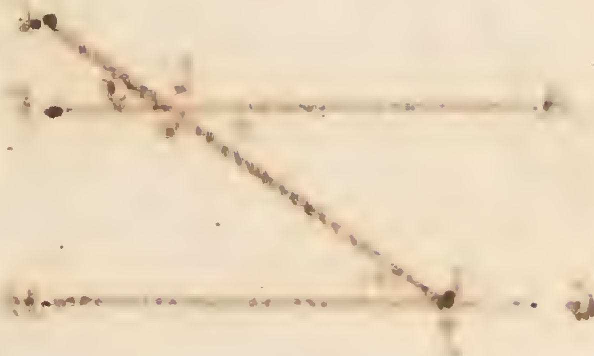
Primo duas parallelas AB CL oblique secet, recta FG, dico angulos alternos aequales esse inter se, scilicet x=z, et angulum BGF = CFG.

Ex punctis F, et G ad rectas AB CL (prop: 14) demittantur perpendiculares FE, GI.

Demonstratio

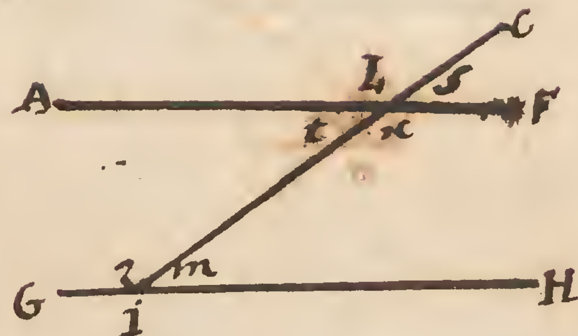
Quoniam, ex constructione, recta FE, est

perpendicularis ad rectam AB, ideo (prop: ante) erit etiam perpendicularis ad alteram parallelam CL. consequenter ducere recta EF, GI ad eandem CL perpendiculares (prop: 18) erunt inter se parallelae. Quapropter duo trianguli EFG, ICF habent latus FE=GI (defin: 11) quia sunt perpendiculares inter parallelas AB, CL positae, similiter est latus EG=IF sunt enim perpendiculares positae inter lineas (demonstr:) parallelas FI, GI latus vero FG commune est utrique triangulo ergo (prop: 9) erit angulus x=z quibus opponuntur latera aequalia EF GI, et sunt alterni. Praeterea erit angulus o=t, quibus si addantur aequales anguli recti EFG, IGB (axiomate 2) fiet totus angulus ICFG aequalis integro angulo BFG, qui sunt pariter alterni.



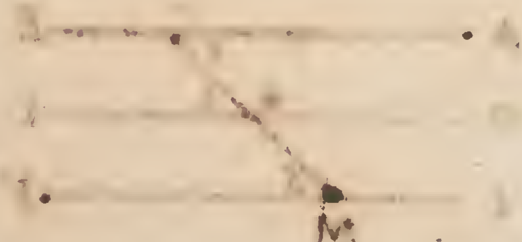
Ergo recta linea supra duas rectas parallelas incidens, efficit angulos alternos aequales inter se. Quod erat primum.

Secundo recta GI supra duas rectas parallelas AF, GH insistens, efficiet angulum externum s aequalem angulo m interno, et opposito ad eandem partem.



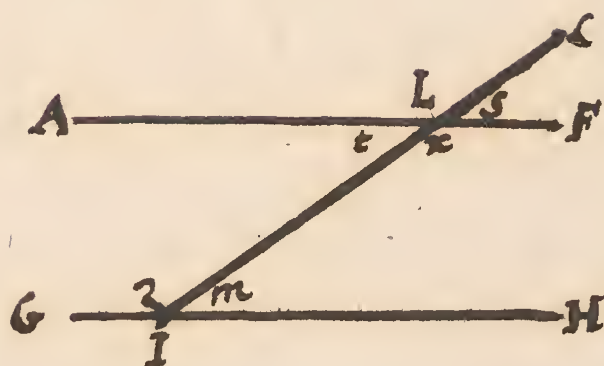
Demonstratio.

Etenim (prop: 17) angulus externus s est aequalis angulo t ad verticem opposito, et per antecedentem demonstrationem, angulus m est aequalis eidem angulo t suo alterno; ergo (axio: 1) erit angulus s aequalis angulo m.



Eadem modo demonstratur angulus CLA = z, quia sunt ambo aequales eidem angulo x.

Consequenter recta linea supra duas rectas parallelas incidens, efficit angulum internum aequalem angulo externo et opposito, et ad eandem partem. Quod erat secundum.



Tertio recta CI secans duas rectas parallelas AF, GH, efficiet duos angulos x, et m internos, et ad eandem partem positos aequales duobus angulis rectis

Demonstratio

Anguli alterni z, et x per primam partem hujus propositionis sunt aequales inter se atque ipsis adjungatur ipse angulus m et duo anguli

Sed anguli consequentes z, et m (prop: 13) adaequant duos rectos. ergo (axiom: 1), etiam duo anguli x, et m aequales erunt duobus angulis rectis

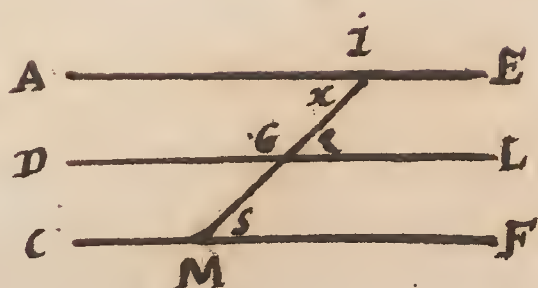
Similiter demonstrantur aequales duobus rectis duo anguli t, et z.

Ergo recta linea incidens in duas rectas parallelas efficit duos angulos internos, et ad eandem partem positos, aequales duobus rectis. Quod erat tertio demonstrandum.

Est prop: 29: libri 1 Euclidis.

Propositio vigesima secunda

Theorema



Rectae lineae (AE, CF) eidem rectae (DL) parallelae, inter se quoque erunt parallelae.

Ducatur recta IM, eas utcumque secans in punctis I, G, M.



Demonstratio

Quoniam duæ rectæ AE, DL (hypotesi) sunt inter se parallellæ, ideo (prima parte prop: ante:) erit angulus x æqualis alterno z. Præterea quia rectæ CF, DL (hypotesi) sunt parallellæ ideo (secunda parte prop: ante:) erit angulus internus s æqualis angulo z externo, et opposito et ad eandem partem. ergo (axio: 1) erit angulus x æqualis angulo z's, qui sunt alterni, consequenter (prima parte prop: 19) duæ rectæ AE, CF erunt parallellæ. Quod erat ostendendum

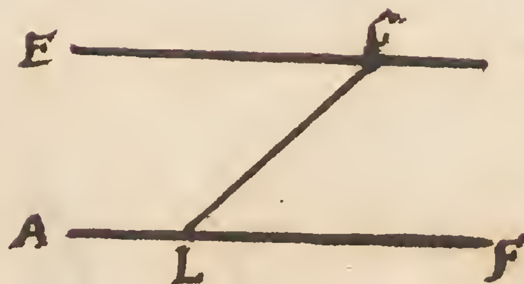
Est prop: 30 libri 1 Euclidis

Propositio vigesima tertia

Problema

Per datum punctum (C) rectam lineam ducere parallellam alteri datæ rectæ AF.

Ex dato puncto C ad quodlibet punctum L in recta data AF ducatur recta CL, et ad punctum C supra rectam CL (prop: 10) constituatur angulus LCE æqualis angulo FLC erit EC quæsita linea.

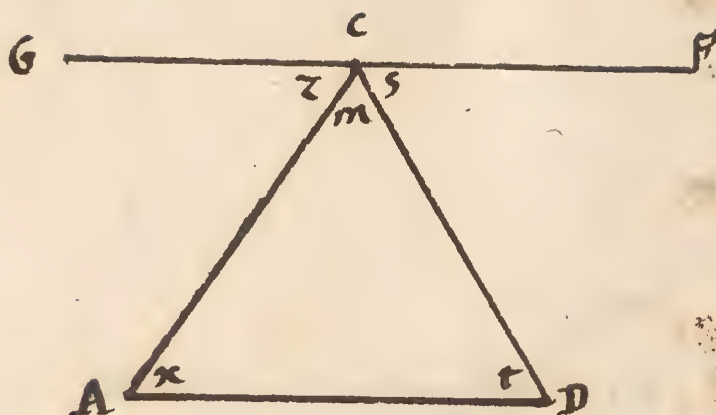


Demonstratio

Nam anguli alterni ECL, FLC sunt æquales inter se per constructionem, ideoque (prima parte prop: 19) rectæ AF, EC erunt parallellæ. Quod erat faciendum, et demonstrandum

Est prop: 31 libri 1 Euclidis

Propositio vigesima quarta



Theorema

In omni triangulo rectilineo, tres anguli simul sumti, adæquant duos angulos rectos

Atque producto quovis latere angulus exterior æqualis erit duobus angulis interioribus, et oppositis simul sumtis.

Primo datum sit triangulum rectilineum ACD dico omnes ejus angulos internos t, m, et x simul sumtos æquales esse duobus angulis rectis

Per punctum C (prop: ante:) ducatur recta GCF parallela lateri AD

Demonstratio

Quoniam rectæ CF, AD (construc:) sunt para=lellæ, ideo recta CA, in ea incidens (prop: 21) efficiet angulos alternos æquales, scilicet x=z; item recta CD easdem parallelas secans; efficiet angulos alternos æquales, hoc est t=s; atque æqualibus æqualia adjungendo (axio: 2) erit x+t=z+s, quibus addatur communis angulus m, et (axio: 2) habebitur summa x+t+m=z+s+m; atqui (cor: 1 prop: 15) summa angulorum z, m, et s adæquat duos angulos rectos; ergo (axio: 1) etiam tres anguli x, t, et m simul sumti duobus rectis æquales erunt. Quod erat primo de=monstrandum.

Secundo producatur quodvis latus, ut AD versus E, et angulus exterior CDE erit æqualis duobus angulis x, et m, interioribus, et oppositis simul sumtis.

Demonstratio.

Nam duo anguli consequentes t, et CDE simul (prop: 10) sunt æquales duobus rectis; sed tres anguli interni x. t, et m simul (ante: demon:) sunt pariter æquales duobus angulis rectis. ergo (axio: 1) duo anguli consequentes t, et CDE æquales erunt tribus angulis x t, m simul sumtis. atque dematur communis angulus t, et (axio: 3) remanebit angulus externus CDE æqualis duobus angulis x, et m internis, et oppositis simul sumtis. Quod erat secundum propositum.

Quapropter in omni triangulo rectilineo &c. Quod erat demonstrandum.

Et prop: 32 libri 1 Euclidis.

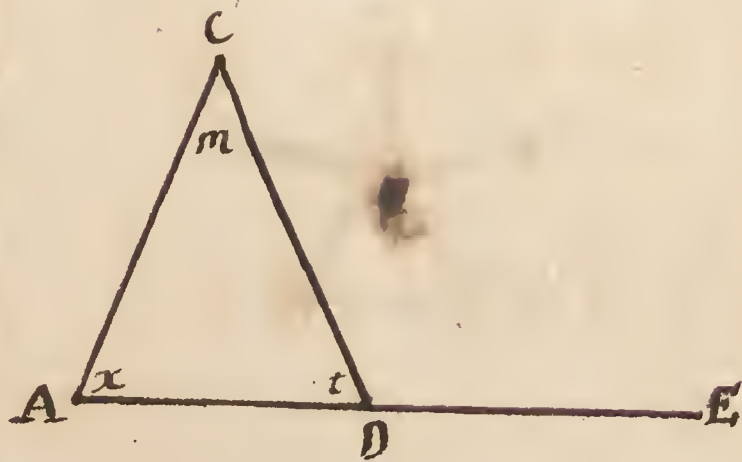
Corolarium primum.

Hinc cujuscunque trianguli rectilinei duo anguli simul sumti semper minores erunt duobus rectis, quia per primam demonstra:tionem, omnes tres simul sumti duos tantum rectos adæquant

Et prop: 17 libri 1 Euclidis.

Corrolarium secundum.

In quolibet triangulo rectilineo producto uno latere, angulus externus major erit utroque interno, et opposito. nam per secundam demonstrationem angulus externus CDE adæquat duos internos et oppositos m, et x simul sumtos, ideoque major erit tam angulo m, quam angulo x, ut per se patet.



256

Ex prop. 16 libri 1 Euclidis

Corrolarium tertium

Si recta linea BL supra duas rectas AF, ME, incidens, faciunt angulos internos, et ad eandem partem positos ABL et MLB majores duobus rectis, tunc reliqui duo anguli interni, et ad alteram partem positi FBL, et ELB erunt minores duobus rectis, quia duo anguli consequentes in B (prop. 13) una cum duobus angulis consequentibus in L efficiunt quatuor rectos, a quibus si auferantur duo anguli ABL, MLB, ex hypotesi majores duobus rectis, reliqui duo FBL, ELB erunt minores duobus rectis.



Praeterea lineae AF, ME non erunt parallellae nam quando lineae sunt parallellae (prop. 21) anguli interni, et ad eandem partem positi duos rectos adaequant.

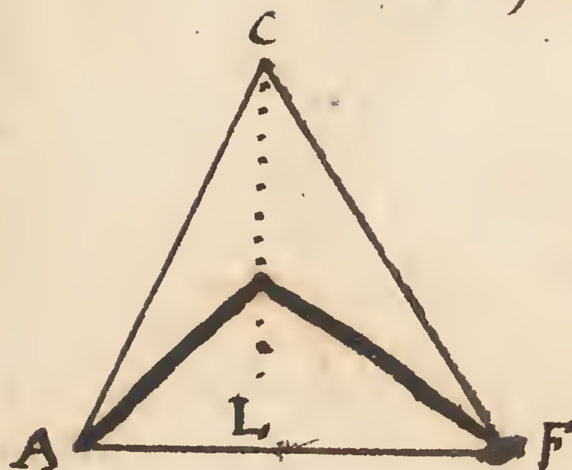
Si autem (quod est axioma 11 Euclidis) utrinque producantur rectae AF, ME, ubique concurrent ex ea parte, versus quam anguli interni FBL, ELB sunt minores duobus rectis, quia (Cor. 1) duo anguli cujusvis trianguli rectilinei simul semper sunt minores duobus rectis atque propter eandem rationem ex altera parte, versus quam anguli interni ABL, MLB, sunt majores duobus rectis, lineae nunquam convenient sed magis magisque a se mutuo recedent. /

Unde lineae AF, ME dicuntur convergentes, versus partem FE, et divergentes ex altera

parte AM.

Corrolarium quartum.

Si a terminis A, et F unius lateris cujusvis trianguli ACF ductæ fuerint duæ rectæ AE, FE ad aliquod punctum E intra triangulum; ipsæ rectæ continebunt angulum AEF majorem angulo ACF contento a reliquis lateribus dati trianguli ACF. Etenim ducta recta CEL angulus AEL externus trianguli AEC (Cor: 2) major est angulo ACE interno, et opposito. similiter externus angulus LEF major est angulo ECF interno, et opposito: consequenter totus angulus AEF major erit integro angulo ACF.



Est secunda prop: 21 libri 1 Euclidis

Corrolarium quintum

Quoniam summa trium angulorum cujusvis trianguli rectilinei (prima parte hujus prop.) adæquat duos angulos rectos; ideo si unus trianguli angulus fuerit obtusus, seu major recto, reliqui duo anguli erunt acuti, et simul sumti minores erunt angulo recto.



Si autem unus trianguli angulus fuerit rectus, reliqui duo erunt acuti, et simul sumti efficient unum angulum rectum. Quapropter quando unus angulus trianguli est æqualis reliquis duobus simul sumtis, tunc angulus ille est rectus, quia æqualis dimidio summæ duorum rectorum.





Corrolarium sextum.

Praeterea quia (prima parte hujus prop.) summa omnium angulorum cujuslibet trianguli rectilinei semper aequalis est duobus angulis rectis. ideo (axio: 1) summa trium angulorum cujusvis trianguli rectilinei aequalis erit summae trium angulorum alterius cujuscumque trianguli rectilinei.

Corrolarium septimum.

Quapropter si duo anguli unius trianguli aequales fuerint duobus angulis alterius trianguli, etiam reliquus reliquo aequalis erit.

Similiter si unus angulus unius trianguli aequalis fuerit angulo alterius trianguli, etiam reliqui duo anguli prioris trianguli simul sumti, aequales erunt reliquis duobus angulis alterius trianguli simul sumtis. Quia in utroque triangulo eandem summam duorum rectorum conficere debent.

Corrolarium octavum.

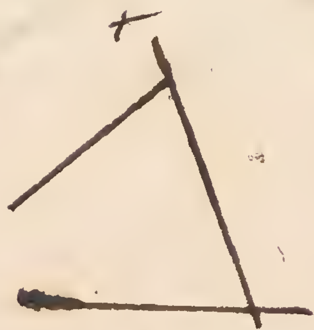
Summa omnium angulorum cujuscumque figurae rectilineae, totidem rectos adaequat quot unitates, demtis quatuor, continentur in numero laterum bis sumto.

Nimirum si datae figurae laterum numerus bis sumatur et ex ipso numero duplo subtrahatur numerus quatuor, residuum indicabit, quot rectis aequivaleant omnes anguli interni ejusdem figurae.

Ut dato pentagono ILCFG, summa omnium angulorum FCL, CLI, LIG,

ejusdem figuræ, æquivalebit decem angulis rectis minus quatuor, hoc est efficiet sex angulos rectos.
Nam intra figuram sumatur aliquod punctum A, ex quo ad singulos angulos datæ figuræ ducantur rectæ AC, AL, AF &c.; figura divisa erit in totidem triangula quot habet latera, nimirum in quinque. Sed omnis anguli unius cujuslibet trianguli (prima parte hujus prop.) adæquant duos rectos; ergo quia totidem sunt triangula, quot latera summa omnium angulorum eorundem quinque triangulorum æquivalebit decem angulis rectis, scilicet duplo numero laterum: anguli vero eorundem triangulorum qui fiunt in A, non spectant ad figuram et simul sumti (cor. 3 prop. 15) adæquant quatuor rectos, quapropter si de decem rectis (summa omnium angulorum eorundem triangulorum) demantur quatuor recti (scilicet omnes anguli, qui fiunt in A) reliqui sex anguli recti æquales erunt reliquis omnibus triangulorum angulis; idest æquales erunt summæ omnium angulorum dati Pentagoni.
Si data figura habuerit sexdecim latera omnes ejus anguli interni simul sumti æquales erunt triginta duobus angulis rectis minus quatuor, hoc est viginti octo angulos rectos constituent,

quod eodem ratiocinio demonstrari potest, atque idem intelligatur, de quelibet alia figura rectilinea

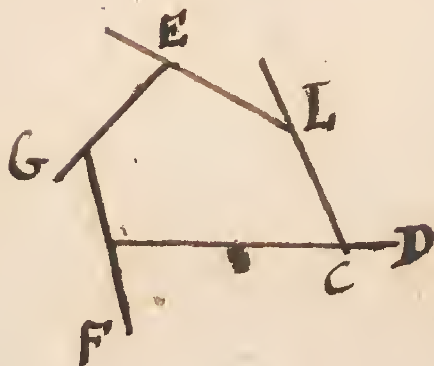


Corrolarium nonum

Ergo omnia polligona habentia eundem numerum laterum, habebunt etiam internorum angulorum summas æquales inter se.

Corrolarium decimum

Si cujuslibet figuræ rectilineæ singula latera, ex una tantum parte producantur, omnes anguli externi simul sumti, quatuor rectis æquales erunt.



Etenim in figura CLFGE duo anguli consequentes LCE internus, et LCD externus simul sumti (prop: 13) adæquant duos rectos quod pariter verificatur in reliquis punctis L, F, G, E; consequenter anguli interni simul cum externis totidem paria angulorum rectorum efficiunt quot sunt poligoni latera, sive quod idem est, efficiunt numerum angulorum rectorum duplum numeri laterum, nimirum in hoc casu decem angulos rectos constituunt, a quibus demantur omnes anguli interni, qui (cor: 6) bis tot rectos constituunt, quot sunt latera demtis quatuor in hac figura sex rectos efficiunt, reliqui quatuor anguli recti erunt æquales summæ omnium angulorum externorum. Eodem modo idem demonstratur de alia

cujuslibet figuræ rectilineæ.

Corrolarium undecimum.

Ergo summa angulorum externorum cujuslibet figuræ rectalineæ est æqualis summæ omnium externorum alterius cujuscumque figuræ rectilineæ.

Propositio vigesima quinta

Theorema

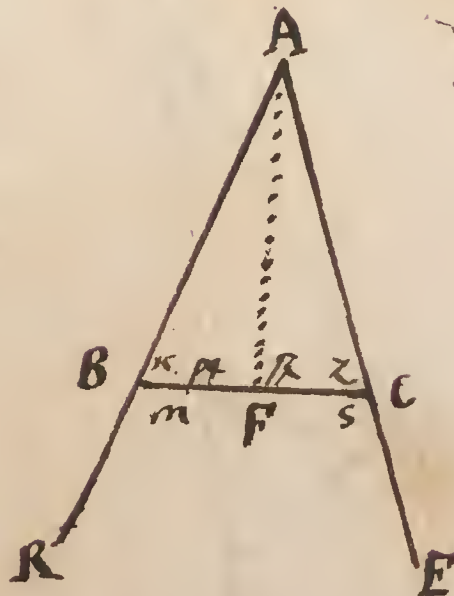
In quolibet triangulo Isosceles anguli supra basim sunt æquales inter se. Atque productis æqualibus lateribus anguli infra basim constituti sunt etiam æquales inter se.

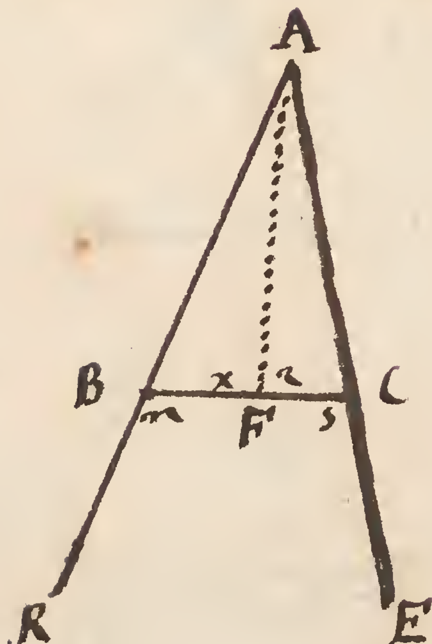
Datum sit triangulum ABC, cujus duo latera AB, et AC sint æqualia, erit BC basis trianguli Isoscelis, atque erit angulus x æqualis angulo z, qui sunt supra basim BC et productis infra basim BC, æqualibus lateribus AB versus R, et BC versus E, erit angulus m æqualis angulo s, qui sunt infra basim.

Basis BC bifariam dividatur in F (prop: 12), et ducatur ad verticem A recta FA (postu: 1).

Demonstratio

Duo triangula ABF, AF,C, habent latus AB=AC, ex hypotesi, et (construc:) latus FB=FC, et latus AF utrique triangulo commune, ergo (prop: 9) erit angulus x=z quibus opponitur latus commune AF, præterea duo anguli consequentes





x, et m simul sumti (prop: 15) sunt aequales duobus rectis eadem ratione duo anguli consequenter z, et s simul sumti adaequant duos rectos, ideoque (axio: 1) duo anguli x, et m aequales erunt duobus z, et s, a quibus demantur anguli jam ostensi aequales x, et z et (axio: 3) remanebit angulus m aequalis angulo s.

Ergo in quolibet triangulo Isoscele. Quod erat demonstrandum.

Est prop: 5 libri I Euclidis

Corrolarium primum

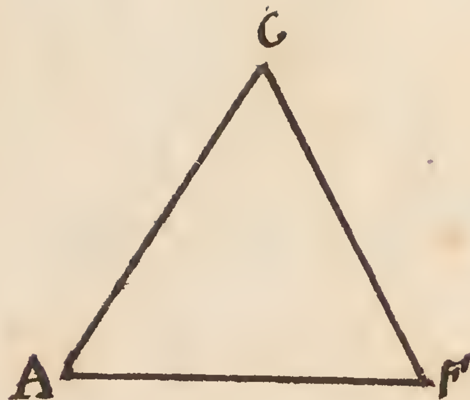
Quoniam duo triangula ABF, ACF (demon:) habent singula latera singulis lateribus aequalia, ideo erit etiam angulus AFB=AFC, quibus opponuntur aequalia latera AB, AC, consequenter (defin: 9) recta AF ex vertice A trianguli Isoscelis ABC ad basis medietatem F ducta erit perpendicularis ad eandem. Praeterea etiam bifariam secabit angulum verticalem CAB, quia (prop: 9) erit etiam angulum FAB=FAC, qui subtenduntur a lateribus aequalibus BF, FC.

Corrolarium secundum

Si vicissim ex vertice A trianguli Isoscelis [illegible] basim BC (prop: 14) demittatur perpendicularis AF, ipsa bifariam secabit et basim BC, et angulum oppositum CAB, nam (axio: 16) est angulus AFB=AFC, et angulus x=z (demon: antec:), consequenter (cor: 7 prop: 24) reliquus angulus FAB

erit aequalis angulo FAC, sed (ex hypothesi) est latus AB=AC, qui interpositi sunt inter angulos aequales, ideoque (prop: 8) erit latus FB=FC, quae angulis aequalibus opponuntur.

Corrolarium tertium.



Omne triangulum aequilaterum ACF, est etiam aequiangulum, nam quia latera CA CF, (defin: 19) sunt aequalia, ideo (primo parte hujus prop:) erit angulus A=F similiter, quia est AC=AF erit angulus C=F proindeque (axio: 1) erit etiam angulus A=C, consequenter omnes tres anguli erunt aequales, et singuli continebunt tertiam partem duorum rectorum.

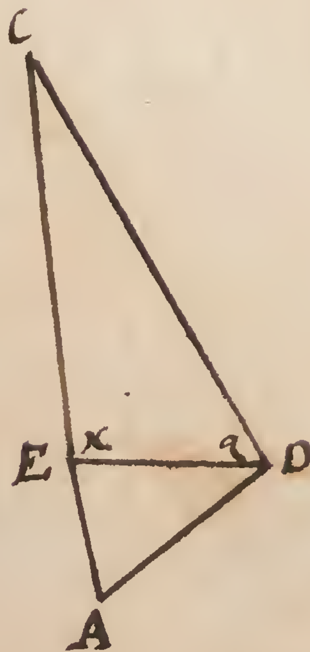
Corrolarium quartum

Ergo quilibet angulus trianguli aequilateris adaequat duas tertias partes unius anguli recti, sex enim tertiae partes constituunt duo integra et tres anguli trianguli aequi=lateris cum sint aequales, atque simul sumti (prop: 24) adaequant duos rectos, ideoque quilibet ipsorum aequalis erit duabus tertiis partibus unius anguli recti.

Propositio vigesima sexta

Theorema

Triangulum habens unum latus altero majus habebit etiam angulum, majori lateri oppositum, majorem angulo opposito minori lateri. Sit triangulum ACD habens latus AC majus latere CD



erit angulus CDA, subtensus a majori latere CA, major angulo CAD subtenso a latere minori CD.

Ex majori latere CA (prop: 3) secetur pars CE aequalis minori CD, ducaturque recta DE (postu: 1).

Demonstratio

In triangulo CDE (construc:) hisco scele (prop: ante:) est angulus x=z, ideoque totus angulus CDA, qui (axio: 10) major est angulo z sua parte, erit (secunda parte axio) etiam major angulo x; sed trianguli ADE angulus externus x (cor: 2 prop: 24) major est interno, et opposito A; consequenter (axio: 13) angulus CDA, qui ostensus est major angulo x, erit quoque major angulo A.

Ergo in quolibet triangulo latus majus subtendit angulum majorem, et latus minus subtendit angulum minorem, quod erat ostendendum.

Est prop: 18 libri 1 Euclidis

Corrolarium

Quapropter triangulum scalenum habebit omnes angulos inaequales

Propositio vigesima septima

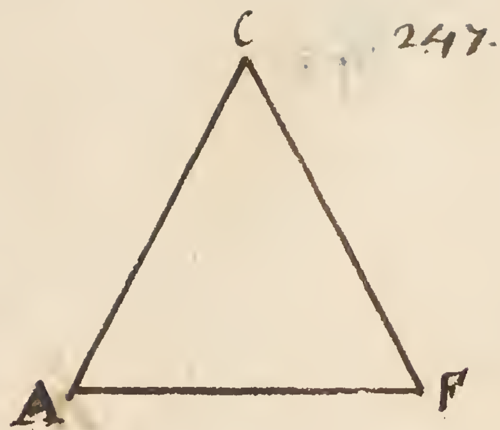
Theorema

Triangulum habens duos angulos inter se aequales habebit pariter duo latera aequalia ipsis angulis opposita.

Si autem triangulum habuerit angulum

majorem angulo, tunc habebit latus oppositum majori angulo majus latere subtendente angulum minorem.

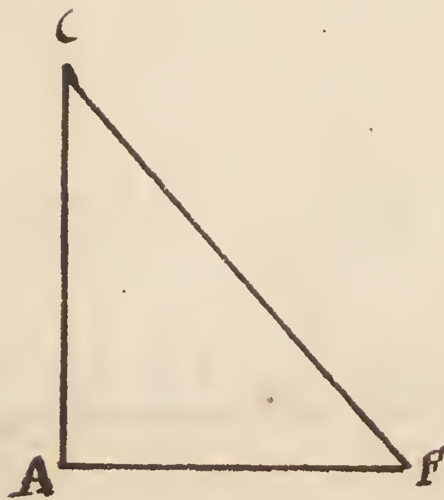
Primo sit triangulum ACF, in quo angulus A sit aequalis angulo F erit latus CF = CA.



Demonstratio

Nam si latus CF majus vel minus esset latere CA, tunc (prop: ante:) angulus oppositus A esset pariter major vel minor angulo F quod est contra hypotesim, ergo (axio: 12) necesse est ut latus CF sit aequale lateri CA. Quod erat primo demonstrandum

Secundo sit triangulum ACR, cujus angulus A sit major angulo F, erit latus CF majus latere CA



Demonstratio

Etenim si latus CF esset aequale lateri CA tunc (prop: 05) esset angulus A aequalis angulo F, quod est contra hypotesim. Si autem latus CF esset minus latere CA tunc (prop: ante:) angulus A minor esset angulo F, quod pariter est contra hypotesim; ergo necesse est, ut latus CF sit majus latere CA, quando angulus A major esset angulo F, quod erat secundum. Prima pars est prop. 6 et secunda pars est prop. 4 libri Euclidis.

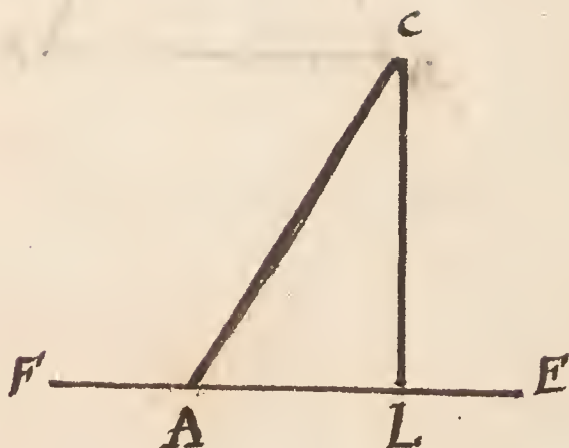
Consectarium primum.

Hinc omne triangulum habens duos angulos aequales erit Isosceles, et si habuerit omnes angulos aequales, hoc est

si fuerit æquiangulum, erit etiam æqui=
=laterum et si habuerit omnes angulos
inæquales erit scalenum.

Corrolarium secundum

Omnium linearum quæ ex quolibet
puncto C, ad quantitatem rectam FE,
duci possunt, minima est perpendicularis
CL. Nam si ducatur quælibet alia
recta CA, quia in triangulo ACL,
angulus rectus ALC, major est acuto
CAL, etiam latus CA oppositum majori
angulo (secunda parte hujus prop:)
majus erit latere CL, subtendente
angulum minorem quod semper veri=
=ficatur.



Quapropter distantia inter punctum C
et lineam FE dimetitur a perpendiculari
CL, atque ab eodem puncto C ad rectam
FE, unica duci potest linea perpendicularis

Propositio vigesima octava.

Theorema

Omne parallelogrammum habet latera
opposita æqualia angulos oppositos
æquales, et bifariam dividitur a diametro.

Sit parallelogrammum ACFB erit
latus AB=CF latus AC=FB angulus
A=F angulus ACF=FBA, et ducta
diametro CB, erit triangulum ABC
æquale triangulo CFB



Demonstratio

Rectæ AB, CF (hypotesi) sunt

parallela, ideo (prop: 21) anguli alterni
h, et x deinceps aequales: similiter ob parallelas
AC, FB, anguli alterni t, et s erunt aequales
proindeque duo triangula ACB, FCB,
habent duos angulos h, et x aequales duobus
t, et z alterum alteri, et latus CB inter=
=positum inter angulos aequales, commune
est utrique triangulo: ergo (prop: 5)
erit latus AB = FC, latus AC = FB, angulus
A = F, et triangulum ACB, aequale triangulo
FCB. Insuper, quia anguli h et z
ostensi sunt aequales angulis t, et x
(axio: 2) erit totus angulus ACF aequalis
integro angulo FBA.
Quapropter in omni parallelogrammo etc.
Quod erat demonstrandum.
Est prop: 24 libri 1 Euclidis.

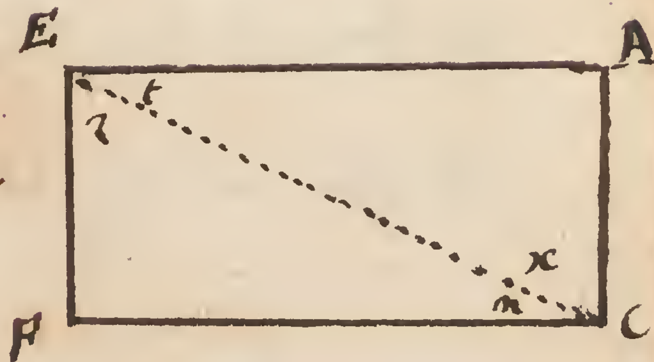
Propositio vigesima nona

Theorema.

Figura quadrilatera habens duo
latera parallela et aequalia habebit
etiam reliqua duo latera parallela,
et aequalia scilicet erit parallelogrammum.
Figura quadrilatera ACFE habeat
latus AC parallelum, et aequale
lateri EF; etiam latus AE parallelum
et aequale erit lateri CF.

Demonstratio.

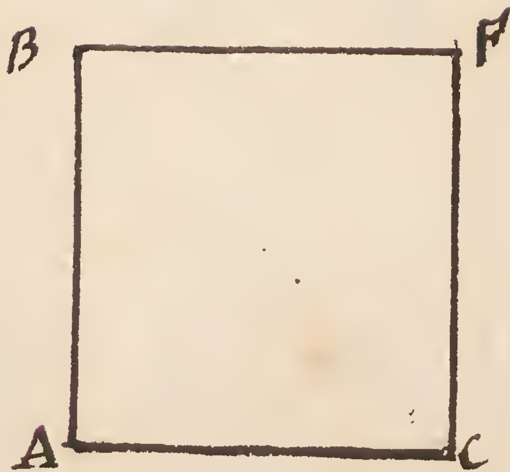
Ducatur diagonalis EC quae incidens
in duas rectas AC, EF (ex hypotesi)
parallelas (prop: 21) efficit angulos



alternos x, et z aequales inter se: itaque
duo triangula ACE, EFC habent latus
EC commune, et (hypothesi) latus AC=EF
et angulum x=z, qui sunt lateribus
aequalibus ergo (prop.6) erit latus
AE=CF, et angulus s=m, qui duo anguli
sunt alterni, proinde (prop.19)
rectae EA, FC erunt parallelae, et figura
AF erit parallelogrammum.
Itaque figura quadrilatera habet etc.
Quod erat demonstrandum.
Est prop. 33 libri 1. Euclidis.

Propositio trigesima

Problema

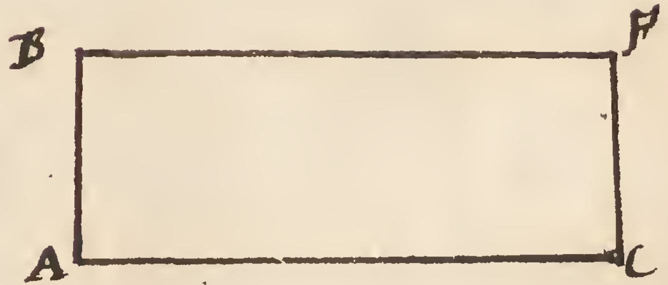


Super data recta (AC) quadratum
describere, vel aliud quodcumque para=
=llelogrammum.
Super AC, et ex punctis A et C (prop.18)
erigantur indefinitae perpendiculares
AB, CF, quae ambae (prop.8) fiant
aequales datae AC, et ducatur recta BF,
erit AF quaesitum quadratum.

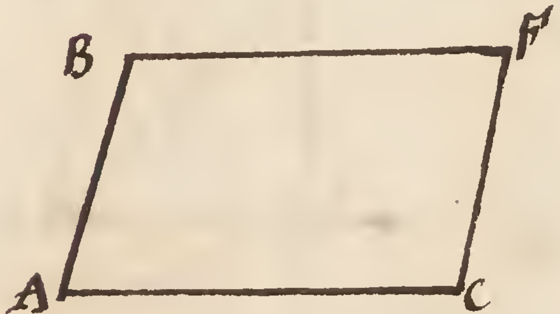
Demonstratio

Nam rectae AB, CF (construct.) perpen=
=diculares eidem AC (prop.18) sunt
parallelae, et (construct.) sunt aequales
ideoque (prop. praeced.) erit latus FB=AC
et figura AF erit parallelogrammum
sed eidem lateri AC (construct.) aequalia
sunt latera AB, CF, consequenter
(axio.1) omnia latera sunt aequalia:

angoli vero A, et C (construct:) sunt recti, ideoque etiam anguli F, et B ipsis oppositi, et aequales (prop: 28) erunt recti; ergo figura BC erit quadratum (defin: 26), quia ex demonstratis est parallelogrammum aequilaterum et rectangulum, quod erat primum. Ex prop: 46 libri 1 euclidis.



Secundo si aequales perpendiculares AB, CF majores fiant, vel minores recta AC, tunc descripta figura erit rectangulum, seu oblongum, ut per se patet.



Tertio si describendus est Rhombus ducatur ex puncto A recta AB=AC, quae efficiat angulum A acutum vel obtusum; deinde per punctum C ducatur recta CF (prop: 23) parallela, et aequalis rectae AB seu AC, jungaturque recta BF erit AF quaesitus Rhombus.



Quarto quod si constituto angulo A obliquo, ponatur AB major vel minor data AC, et compleatur parallelogrammum habebitur Romboides AF quod erat propositum.

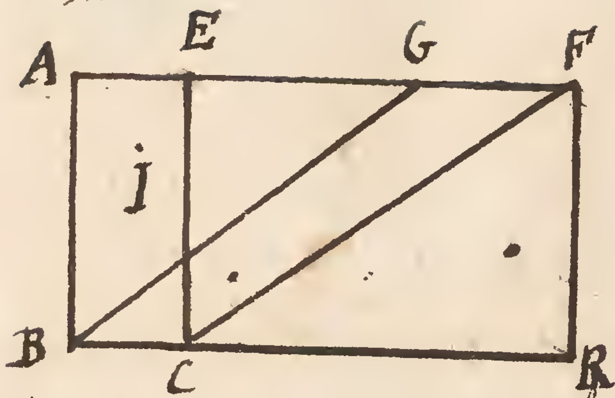
Corolarium

Ergo parallelogrammum habens unum angulum rectum, etiam reliquos angulos rectos habebit.

Propositio trigesima prima

Theorema





Parallellogramma super eadem basi, et inter easdem parallelas constituta inter se sunt aequalia.

Duo parallelogramma ABCE, BCFG habeant communem basim BC et inter easdem parallelas AF, BR constituta sint erit parallelogrammum ABCE aequale parallelogrammo BCFG.

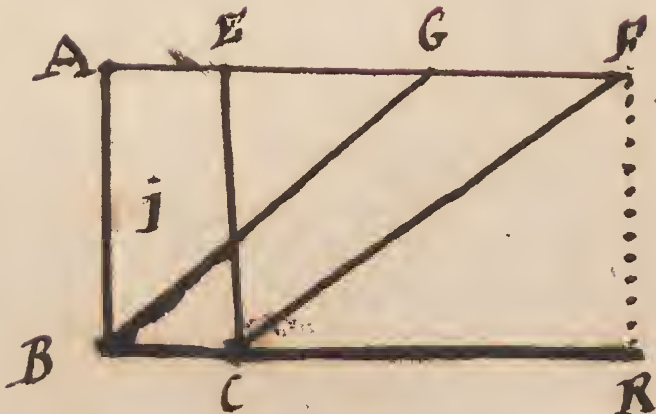
Demonstratio.

Etenim (prop: 26) est AE=BC, et GF=BC ideoque (axio: 1) erit AE=GF quibus addatur communis portio EG, et (axio: 2) erit AG=FE, unde duo trianguli ABG, EFC (prop: 26) habent latera BG=FC, AB=CE, et (demons:) AG=FE, ergo (prop: 9) erit triangulum ABG aequale triangulo EICF a quibus demattur pars communis hoc est triangulum EIC, et (axio: 3) re=manebit trapesium EIBA aequale trapesio CIGF, quibus addatur com=mune triangulum IBC, et (axio: 2) erit parallelogramum ABC aequale parallelogrammo BCFG; ergo parale=llogrammo etc: quod erat ostendendum.

Est prop: 35 libri 1 Euclidis

Corolarium primum.

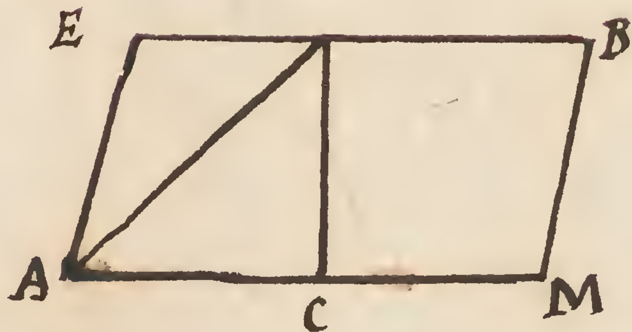
Area parallelogrammi rectanguli ABC (defin: 30) invenitur multiplicando basim BC in altitudinem BA aequalem BFR, sed parallelogrammum obliquangulum BCFG



ortensum et rectangulum ABCE,
ideoque Area cujusvis paralelogrammi
FGBK obtinetur multiplicando basim BC
in altitudinem BA, seu FR, quae est
perpendicularis ducta ex latere opposito
supra basim, si opus est productam.
Itaque si basis parallelogrammi
vocetur M, et ejus altitudo vocetur
a productum a m, erit area para=
=lelogrammi sive ipsum parallelogrammum
significabit

Corolarium secundum

Area vero cujuslibet trianguli rectilinei
ABC est aequalis medietati producti ex
basi AC in ejus altitudinem BM, nam
si per puncta AFB (prop:23) ducantur
recta AE, parallella lateri BC
et BE parallella lateri BC habebitur
parallelogrammum ACBE (prop:28)



duplum trianguli ABC, sed (cor: ante:)
area parallelogrammi ACBE, est
AC x Bm; ergo ejus dimidium, scilicet
area trianguli ABC, erit $\frac{AC \times Bm}{2}$
Itaque si basis AC vocetur B, et altitudo
Bm, vocetur m, productum BM signi=
=ficabit aream parallelogrammi ACBE,
et $\frac{Bm}{2}$, erit area trianguli ABC. sed
(ant: nº 134) est, $\frac{Bm}{2} = \frac{B}{2} \times m = B \times \frac{m}{2}$
consequenter area trianguli etiam
obtinetur multiplicando vel dimidiam
partem in totam altitudinem vel

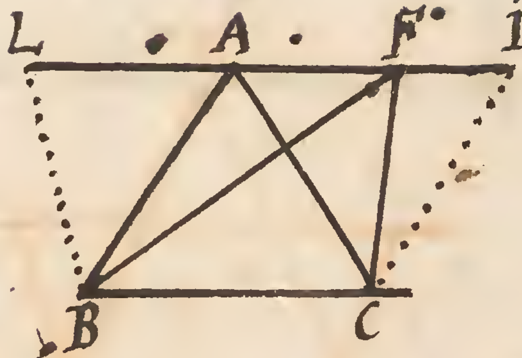
dimidiam altitudinem in totam basim

Propositio trigesima secunda

Theorema

Triangula (ABC, FBC), ut super eadem basi BC, et in eisdem parallelis (L, I BC) constituta aequalia sunt inter se.

Per puncta B, et C (prop: 23) ducatur recta BL parallela lateri AC, et CI parallela lateri FB.



Demonstratio.

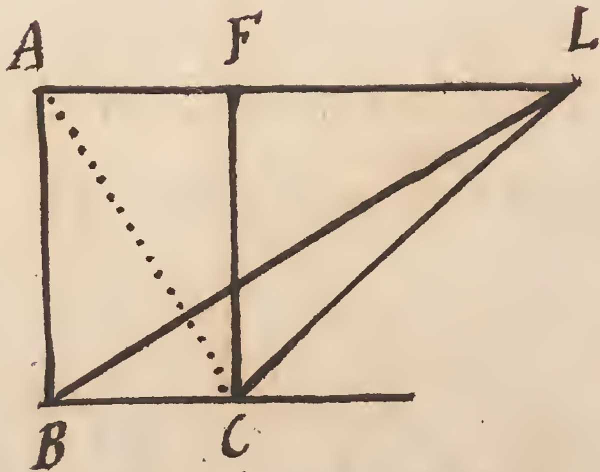
Parallelogramma ACBL, FBCI (prop: ante) sunt aequalia inter se, ergo (axiom: 9) etiam triangula ABC, FBC aequalia erunt inter se, cum (prop: 28) sint medietates aequalium parallelogrammorum LC BI, ergo &c. Quod erat demonstrandum

Et prop: 37 libri 1 Euclidis

Propositio trigesima tertia

Theorema.

Si parallelogrammum (ABCF) et triangulum (L BC) super eadem basi (BC) et in eisdem parallelis (AL, BC) posita fuerint, parallelogrammum erit duplum trianguli.



Demonstratio

Nam ducta diametro AC triangulum LBC (prop: ante:) est aequale triangulo ABC. atqui triangulum ABC (prop: 26) est dimidium parallelogrammi ABCF. ergo (secunda parte axio: 1) etiam aequale triangulum LBC erit dimidium ejusdem

parallellogrammi ABCF. Quod erat demonstrandum.
Est prop: 41 libri 1 Euclidis.

Propositio trigesima quarta
Problema.

Parallellogrammum construere aequale dato triangulo ABC et habens angulum coequalem dato angulo z.
Ex aliquo trianguli dati angulo B, ad latus oppositum, si opus est productum (prop: 14) ducatur perpendicularis BE, quae (prop: 12) bifariam secetur in F, et per punctum F (prop: 23) ducatur recta RFM parallella lateri AC deinde ad rectam AC, et ad punctum in ea A (prop: 10) fiat angulus HAC aequalis dato angulo z: tandem per punctum C (prop: 23) ducatur recta CI parallella rectae AH erit AHIC quaesitum parallellogrammum.

Demonstratio

Area parallellogrammi AHIC (cor: 1 31) est coequalis producto ex basi AC in rectam FE, quae (cor: 1 prop: 31) est altitudo ejusdem parallellogrammi sed area trianguli ABC (cor: 2 prop: 31) aequalis est producto ex basi AC in FE medietatem altitudinis BE: ergo (axio: 1) areae erunt aequales, id est parallellogrammum AHIC aequale erit triangulo ABC. Quod erat propositum.
Est prop: 42 libri 1 Euclidis



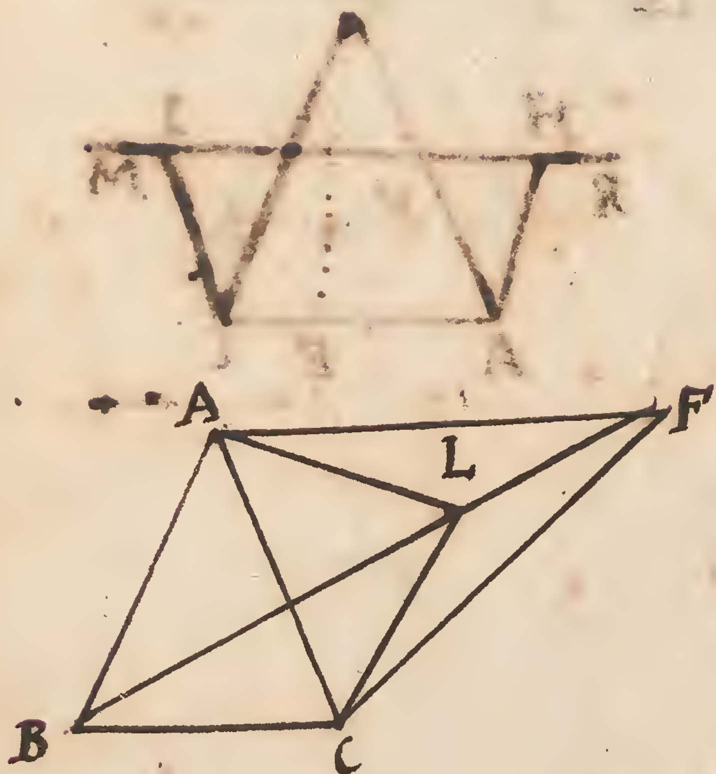
Corollarium

Si datus angulus C fuerit rectus, paralle=logrammum descriptum erit rectangulum. Si angulus C fuerit obliquus, parale=logrammum erit obliquangulum.

Propositio trigesima quinta

Theorema

Triangula aequalia super eadem basi constituta, et ad eandem partem posita erunt in eisdem paralellis, idest eandem altitudinem habebunt.



Supra eandem basim BC et versus eandem partem constituta sint duo triangula aequalia ABC FBC ducta recta AF ex vertice A unius ad verticem F alterius trianguli. dico rectam AF paralellam esse basi BC.

Demonstratio.

Etenim si recta AF non esset paralella basi BC, tunc per punctum A (prop: 23) duceretur recta, exempli causa AL, para=lella basi AC quae alicubi secaret latus BF ut in L et ducta recta LC triangulum LBC (prop: 32) aequale esset triangulo ABC, cui ex hypotesi jam aequale est triangulum FBC. ideoque (axiom: 1) esset triangulum FBC aequale triangulo LBC scilicet totum aequale parti, quod (axiom: 10) fieri nequit. ergo fieri nequit ut recta AF non sit paralella basi BC.

Consequenter triangula aequalia sunt quod erat demonstrandum.
Est prop: 39 libri Euclidis.

Elementorum Geometricae liber tertius

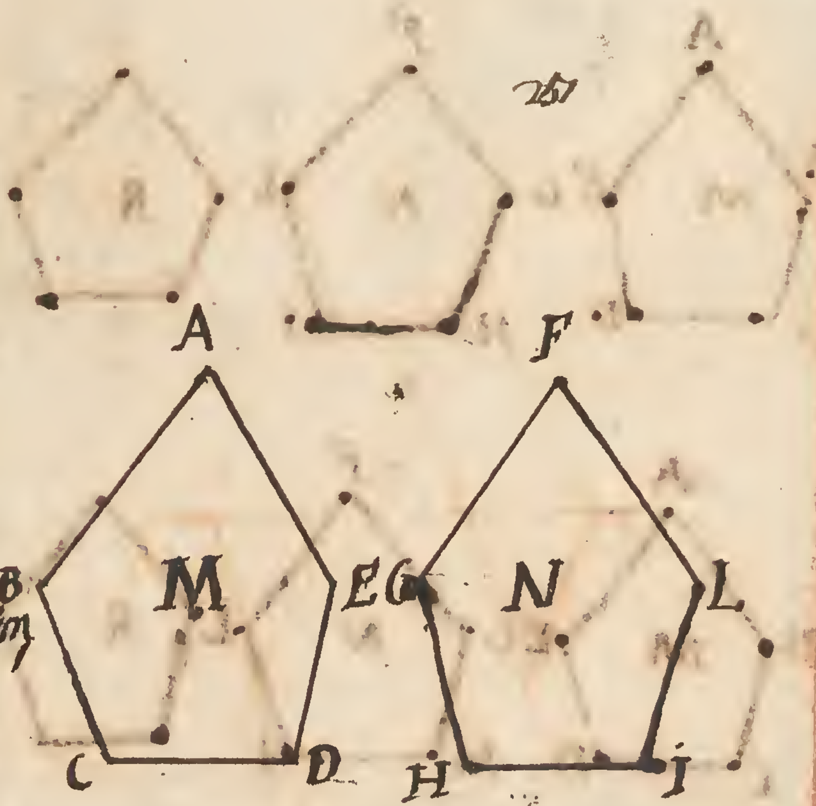
Definitio prima

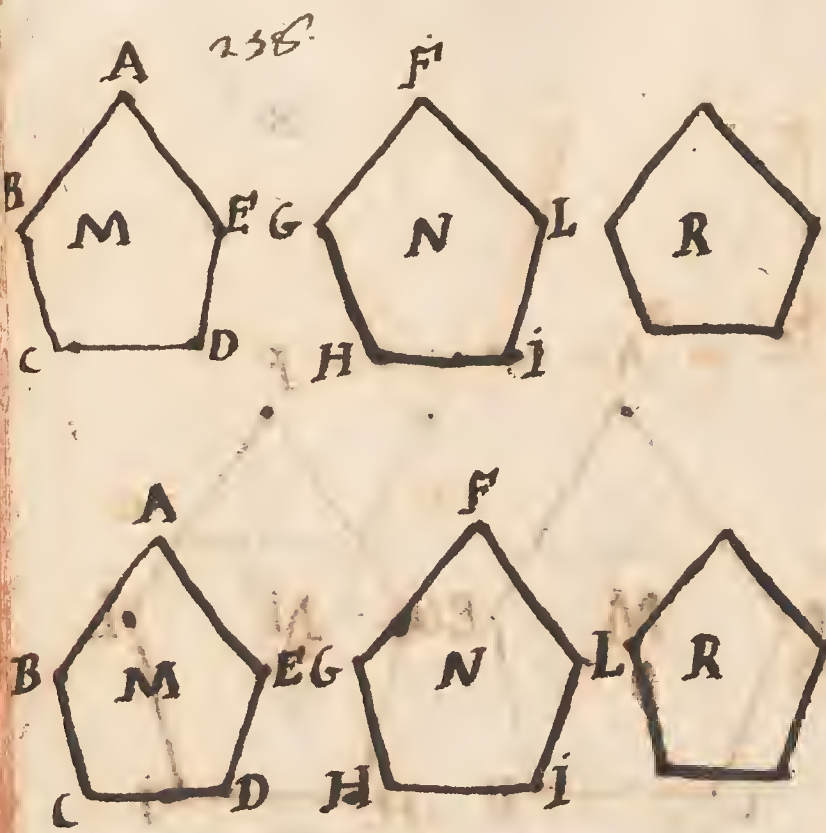
Figurae similes dicuntur illae, quae cum eundem habeant numerum laterum et angulorum, habent praeterea singulos angulos singulis angulis aequales, et latera aequales angulos constituentia sive aequalibus angulis opposita, hoc est inter angulos aequales intercepta, proportionalia inter se.

Singuli anguli pentagoni M aequales sint singulis angulis pentagoni N scilicet A=F, B=G, C=H, D=I, E=L et insuper latera inter angulos aequales posita proportionalia sint singula singulis scilicet AB:FG=BC:GH=CD:HI=DE:IL=AE:FL, sive alternando sit
AB:BC=FG:GH,
BC:CD=GH:HI,
CD:DE=HI:IL, et
DE:EA=IL:FL, tunc pentagona M, et N erunt duae figurae rectilineae similes, et similiter descriptae. Idem intelligatur de aliis quibuscumque figuris similibus.

Corolarium

Ergo rectilinea (M, et N) similia eidem





rectilineo (R) erunt etiam similia inter
se.

Nam anguli polighonorum M, et N,
quia (hypotesi) sunt aequales angulis
polighoni R singuli singulis (axiom: 1)
erunt pariter aequales inter se: similiter,
quia rationes laterum polighonorum M N
sunt (hypotesi) aequales rationibus laterum
polighoni R ideo (axiom: 1) erunt etiam
aequales inter se &c

Et prop: 21 libri 6 euclidis

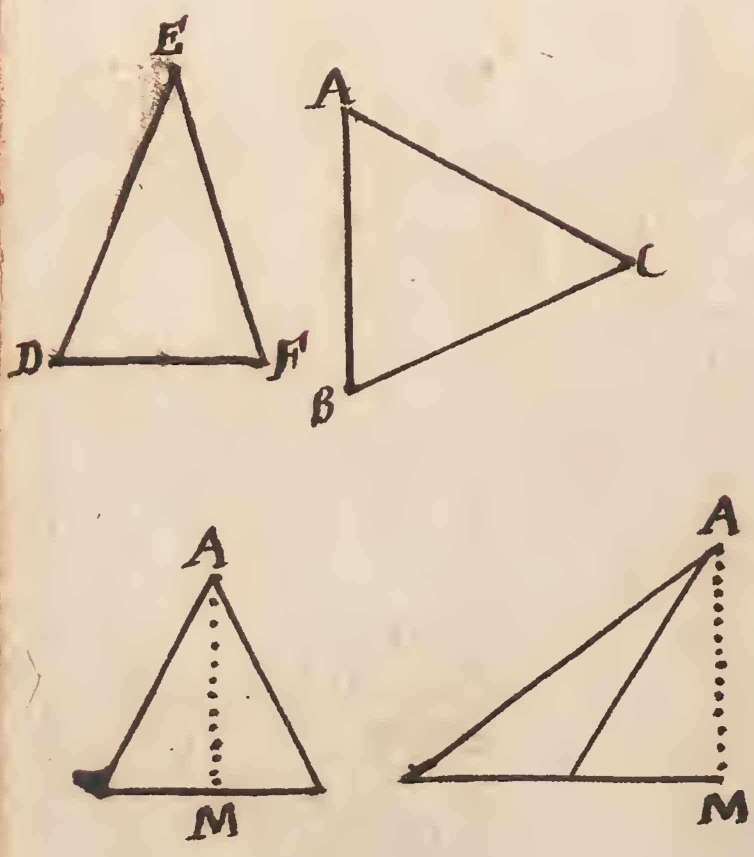
Definitio secunda

In similibus figuris latera inter angulos
aequales posita dicuntur latera omologha
ut in polighonis similibus M et N latera
omologha sunt AB, et GF, BC, et GH, CD,
et IH.

Definitio tertia

Figurae reciprocae vocantur illae, quae habent
latera reciproce proportionalia, scilicet
in quibus est latus unum primae figurae
ad unum latus secundae, sicut aliud
latus secundae ad alterum latus primae.
Sic dico triangula ABC, DEF esse figuras
reciprocas, si fuerit

AB:DE::DF:BC vel
AB:DF::DE:BC.



Definitio quarta

Altitudo cujusvis figurae rectilineae est
perpendicularis ad basim ducta ex
vertice, aut ex latere basi opposito,

ut AM : MA

Corrolarium

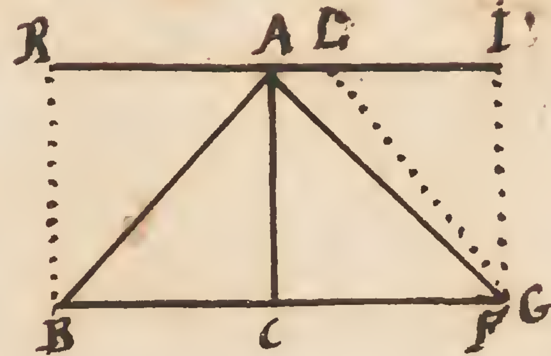
Ergo triangula (ABF, ACF, AFG) habentia verticem communem (A), et bases (BF, CF, FG) in eadem recta linea (BG) positas erunt aeque alta, ipsorum enim altitudo est perpendicularis ducta ex communi vertice (A) ad lineam (BG) in qua reperiuntur bases



Propositio 1ª

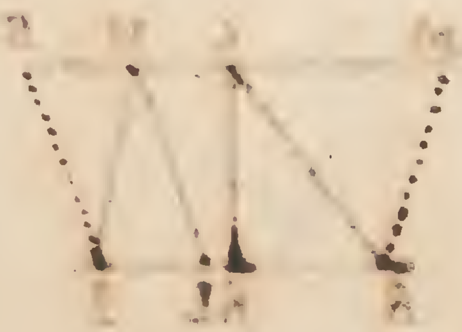
Theorema

Parallelogramma aeque alta sive in eisdem parallelis constituta erunt inter se in ratione partium



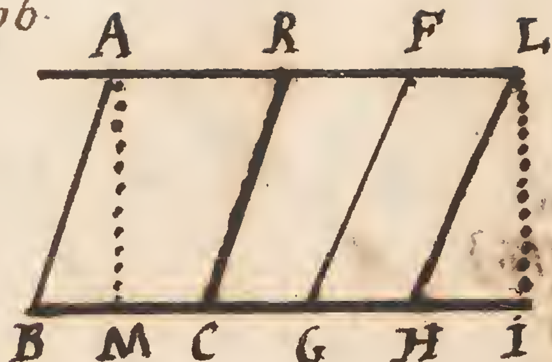
Similiter triangula habentia eandem vel aequalem altitudinem erunt inter se in ratione basium.

Primo data sint duo parallelogramma ABCR, FGHL in eisdem parallelis AI, BI, constituta sive habentia aequales altitudines AM = LI; dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum FH eandem rationem habere quam habet basis BC ad basim GH; nimirum si fuerit basis BC = GH, erit parallelogrammum BR aequale parallelogrammo FH; si basis BC fuerit dupla baseos GH, et parallelogrammum AC duplum erit parallelogrammi FH &c.

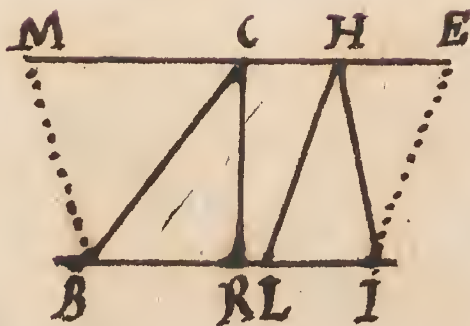


Demonstratio.

Etenim parallelogrammi BR basis BC



vocetur b, et altitudo AM vocetur c
atque (cor: 1 prop: 31) area parallelogrammi
BR, erit bc; similiter parallelogrammi
FH basis GH vocetur m, et ejus altitudo
LI, quia (hypothesi) est aequalis alti:
=tudini AM, erit pariter c unde (cor: prop: 31)
erit cm area parallelogrammi FH.
Sed (prop: 2 libri 1) est
bc : cm = b : m, scilicet parallelogrammum
BR ad parallelogrammum FH sicut
basi BC ad basim GH
Ergo parallelogramma aeque alta
sunt inter se in ratione basium. Quod
erat primum.
Secundo triangula BCR, HLI aeque
alta, sive in eisdem parallelis EM,
IB posita, erunt etiam inter se sicuti
bases BR, LI.
Secentur partes CM = BR, et HE = LI
(prop: 3 libri 2) atque ducantur rectae
BM, IE, ut (prop: 29 libri 2) habeantur
duo parallelogramma RM, LE aeque
alta



Demonstratio

Triangulum BCR est dimidium para:
=llelogrammi RM (prop: 29 libri 2)
et triangulum IHL est dimidium
parallelogrammi LE; sed (cor: 1 prop. 13 libri 1)
dimidium cujusvis quantitatis est ad
dimidium alterius sicuti prima quantitas
ad secundam, ideoque erit ....

$\triangle BCR : \triangle HLI = \square RM : \square LE$

at per antecedentem demonstrationem est

$\square RM : \square LE = BR : LI$; ergo (axio: 1)

erit

$\triangle BCR : \triangle HLI = BR : LI$ scilicet triangulum BCR eandem rationem habet ad triangulum HLI quam habet basis BR ad basim LI; quod erat probandum

Est prop: 1 libri 6 Euclidis

Corrolarium 1um

Ergo si bases parallelogrammorum aequales vel eandem habitudinem habentium fuerint aequales, parallelogramma erunt pariter aequalia inter se.

Est prop: 36 libri 1 Euclidis

Corrolarium 2um

Similiter aequalia inter se triangula aeque alta, sive in eisdem parallelis constituta, si habuerint bases aequales.

Est prop: 38 libri 1 Euclidis

Corrolarium tertium.

Sint duo parallelogramma am, et bm habuerint eandem basim m, et altitudines inaequales a et b, tunc parallelogramma erunt inter se in ratione altitudinum, quia (prop: 2 libri 1) est

$am : bm = a : b$.

Corrolarium quartum.

Si autem duo parallelogramma, am, et bc fuerint aequalia, et habuerint bases a, et b inter se aequales habebunt pariter



altitudinem m, et c aequales inter se: est enim ex hypotesi, am=bc, et a=b; ideoque dividendo am per a, et bc per b (axio: 5) remanebit m=c.

Ergo parallelogramma aequalia ad eandem partem posita et habentia aequales bases in eadem recta linea positas in eisdem parallelis constituta erunt.

Corrolarium quintum

Eadem ratione triangula aequalia, ad eandem partem posita, et habentia bases aequales in eadem recta linea constitutas, erunt etiam inter easdem parallelas posita, sive eandem altitudinem habebunt. Triangula enim sunt medietates parallelogrammorum, eandem altitudinem habentium.

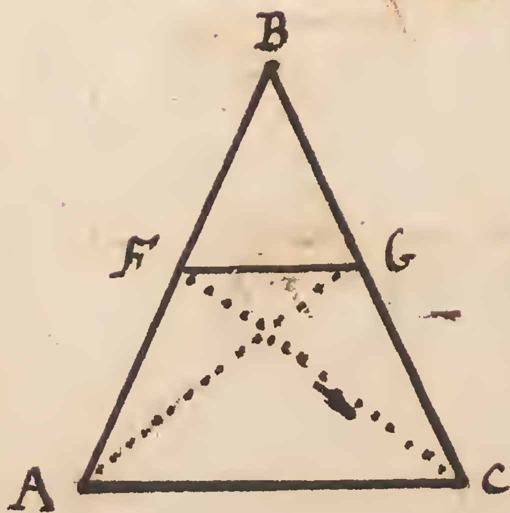
est prop: 40 libri 1 Euclidis.

Propositio secunda

Theorema

Si in quovis triangulo (ABC) ducatur recta FG basi (AC) parallela, ipsa (FG) proportionaliter secabit reliqua duo latera AB, CB, erit nempe (AF: FB=CG: CB).

Si autem duo trianguli (ABC) latera (BA, BC) proportionaliter secta fuerint ab aliqua recta (FG), ipsa recta reliquo lateri, seu basi (AC) erit parallela.



Demonstratio principalis.

Ductis rectis AG, FC, duo triangula

AF'G, CF'G in eisdem parallellis AC F'G, et supra eandem basim F'G constituta (prop: 32 libri 2) erunt aequalia inter se. Proindeque (cor: 4 prop: 2 lib: 1) habebunt eandem rationem ad idem triangulum BF'G, erit nempe

$\triangle AGF' : \triangle BF'G = \triangle CF'G : \triangle BF'G$; sed (secunda parte prop: ante:) triangula aeque alta sunt inter se in ratione basium ideoque erit

$\triangle AF'G : \triangle BF'G = AF' : F'B$, et

$\triangle CF'G : \triangle BF'G = CG : GB$; ergo (axiom: 1) erit

$AF' : F'B = CG : CB$. Quod erat primo demonstrandum.

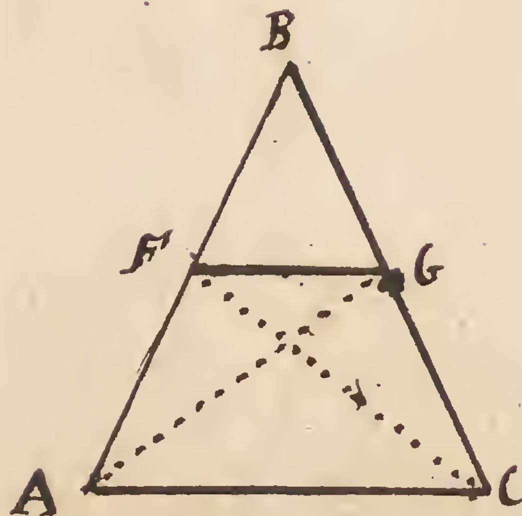
Demonstratio secundae partis

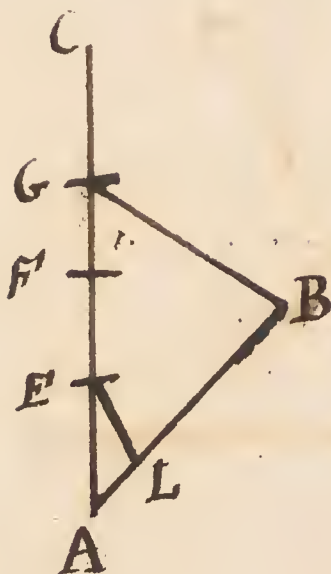
Ex hypotesi est $AF' : F'B = CG : GB$, sed ductis ut antea rectis AG, F'C (secunda parte prop: ante:) erit

$\triangle AF'G : \triangle BF'G = AF' : F'B$, et

$\triangle CF'G : \triangle BF'G = CG : CB$, consequenter (axiom: 1) erit

$\triangle AF'G : \triangle BF'G = \triangle CF'G : \triangle BF'G$; ideoque triangula AF'G, CF'G quae habent eandem rationem ad idem triangulum BF'G (cor: 2 prop: 3 libri 1) erunt aequalia inter se; habet autem eandem basim F'G, et posita sunt ad eandem partem; ergo (prop: 33 libri 2) erunt in eisdem parallellis constituta; erit nempe F'G parallella lateri AC





Quod erat secundo demonstrandum
est prop. 2 libri 6 Euclidis

Propositio 3ª

Problema

Ex data recta (AB) quamlibet partem (exti caussa tertiam (abscindere) ducatur ex puncto A indefinita AC, quae cum data AB efficiat quemlibet angulum CAB atque in ea secentur tres partes AE, EF, FG inter se aequales, deinde jungatur recta BG, et per punctum E (prop. 23 libri 2) ducatur recta EL parallela rectae BG, erit AL quaesita tertia pars rectae AB.

Demonstratio

In triangulo BGA, recta EL (construct.) ducta est parallela lateri GB; ideoque (prima parte prop. 2) erit
GE : EA = BL : LA, et componendo (prop. 4 libri 1) erit
GE + EA : EA = BL + LA : LA, scilicet
GA : EA = BA : LA atqui (construct.) recta GA est tripla rectae EA, ergo etiam recta BA erit tripla rectae LA, erit nempe LA quaesita tertia pars rectae BA. Quod erat propositum
Et prop. 9 libri 6 Euclidis

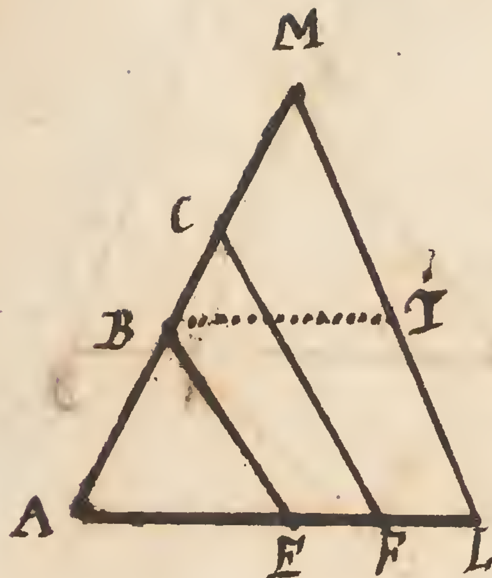
Propositio quarta

Problema

Datam rectam (AL) in eadem ratione dividere qua alia recta (AM) secta

fecent (in punctis B et C).

Datae rectae AL, AM ita componantur inter se, ut efficiant quemlibet angulum LAM; deinde jungatur recta LM cui (prop: 23 libri 2) ducantur paralellae CF, BE, quae rectam AL secabunt in partes proportionales partibus rectae AM ducatur BI paralella rectae AL.



Demonstratio.

In triangulis ACF, BMI (prima parte prop: 2) est

AB : BC = AE : EF, et

BC : CM = BG : CI, sed (prop: 28 libri 2) est

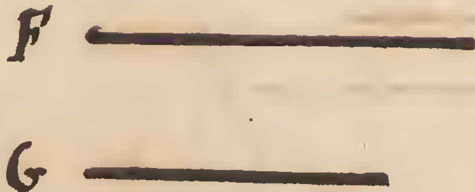
BG = EF, et GI = FL, ideoque aequalibus aequalia substituendo erit

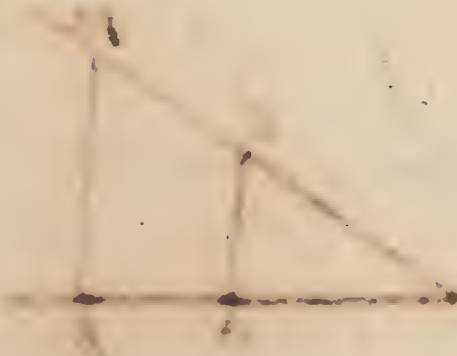
BC : CM = EF : FL; consequenter recta AL divisa erit in partes proportionales partibus rectae AM. Quod erat propositum est prop: 10 libri 6 Euclidis

Propositio quinta

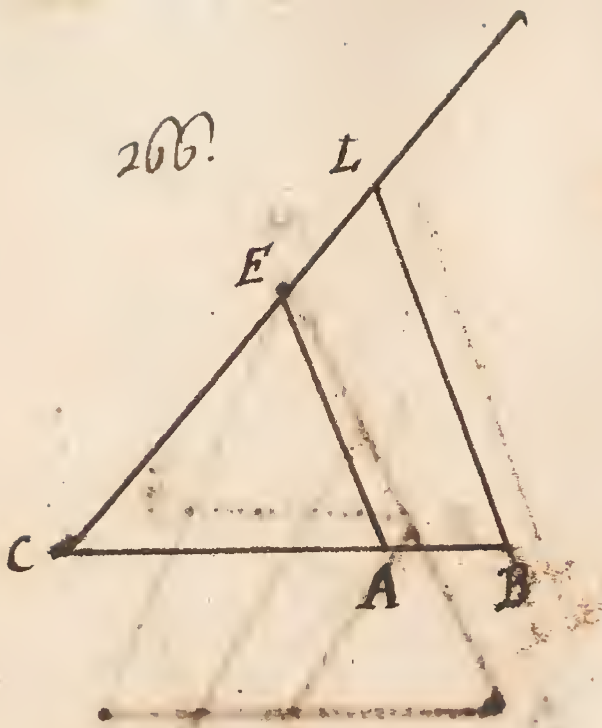
Problema

Datis duabus rectis lineis (F G) tertiam proportionalem invenire, efficiat quilibet angulus rectilineus LCB et ex latere CB (prop: 3 libri 2) secentur partes CA = F, AB = G, et ex alio latere CL secetur CE = G, postea ducatur recta EA, cui per punctum B (prop: 23 libri 2) ducatur recta paralella BL, erit EL quaesita linea.





Demonstratio



Nam (prima parte prop: 2) est
$CA:AB = CE:EL$ idest
$F:G = G:EL$, ergo duabus datis rectis inventa est tertia proportionalis. Quod erat faciendum, et demonstrandum

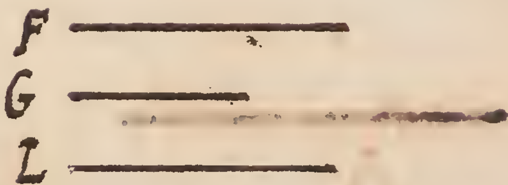
Et prop: 11 libri 6 Euclidis

Corrolarium primum

Si prima linea F vocetur a et secunda G vocetur c tertia inventa EL (Cor: prop: 9 libri 1) apellabitur $\frac{cc}{a}$, ideoque inventa EL exprimit quotientem, qui oritur dividendo quadratum secundae G per primam F.

Corrolarium secundum

Praeterea quia (demonst:) est F
$F:G = G:EL$ idest
$\div F:G:EL$, ideoque (Cor: prop: 1 libri 1) erit
$F \times EL = \overline{G}^2$ scilicet inventa linea EL multi=plicata per datam F efficit rectangulum aequale quadrato alterius lineae datae G.

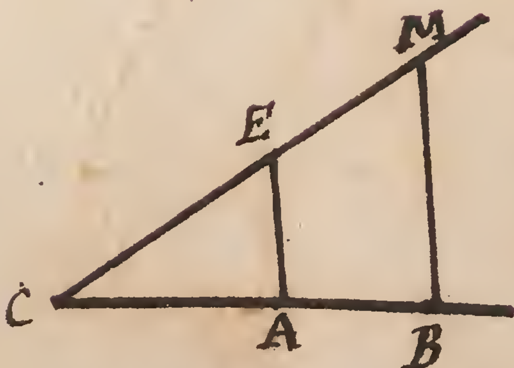


Propositio 6^xta

Problema

Datis tribus rectis lineis F, G, L, quartam proportionalem invenire.

Construatur angulus rectilineus BCM atque ex lateribus CB, CM (prop: 3 libri 2) abscindantur partes CA=F, AB=G, et CE=L, deinde jungatur recta AE cui per punctum B (prop: 23 libri 2) ducatur parallela BM erit EM quaesita linea.



Demonstratio

Etenim (prima parte prop: 2) est
CA:AB=CE:EM scilicet
F: G =L: EM (constructione) et
GA=F AB=G, et GB=L, ergo tribus datis
rectis inventa est quarta proportionalis,
quod erat propositum.
Est prop: 12 libri 6 Euclidis.

Corrolarium primum

Si datae lineae ponantur F=a, G=c, et L=m
tunc inventa EM (prop: 9 libri 1) erit
$\frac{cm}{a}$. consequenter recta EM est quotiens
qui oritur, dividendo rectangulum ex secunda
G in tertiam L, per primam F.

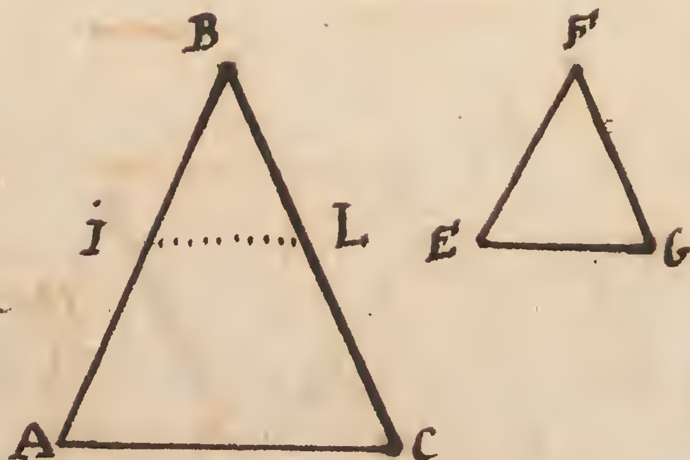
Corrolarium 2dum

Quoniam (demonstr:) est
F: G=L:EM, ideo (prop: 1 libri 1) erit
F×EM=G×L. ergo ut supra lineam
F describatur rectangulum aequalem
rectangulo ex G in L tribus rectis F, G,
L, inveniatur quarta proportionalis
E.

Propositio 7ma

Theorema

Triangula aequiangula habebunt
latera aequalibus angulis opposita
proportionalia nimirum erunt similia.
Sint duo triangula ABC, EFG aequiangula
quae nempe habeant angulos aequales
A=E, B=F, et C=G. habebunt latera
inter angulos aequales posita proportionalia;



scilicet erit

$AB:EF=AC:EG=BC:FG$

Ponatur angulus F supra aequalem angulum B, sive (quod idem est) ex lateribus BA, BC (prop: 3 libri 2) secentur partes $BI=FE$, $BL=FG$ et ducatur IL

Demonstratio

Triangula IBL, EFG habentia latus $BI=FE$, $BL=FG$ et (hypothesi) angulum $B=F$ (prop: 6 libri 2) erunt aequalia, erit nempe basis $IL=EG$, angulus $LIB=E$ et angulus $ILB=G$, sed (hypothesi) sunt anguli $E=A$, et $G=C$, ergo (axio: 1) erit angulus $LIB=A$, et angulus $ILB=C$, externus videlicet interno, et opposito ad eandem partem; ideoque (secunda parte prop: 19 libri 2) erit IL parallela rectae AC, consequenter (prima parte, prop: 2) erit

$AI:IB=CL:LB$, et componendo (prop: 4 libri 1) erit

$AI+IB:IB=CL+LB:LB$, scilicet

$AB:BI=CB:BL$, et substituendo latera FE, FG pro aequalibus BI, BL, erit

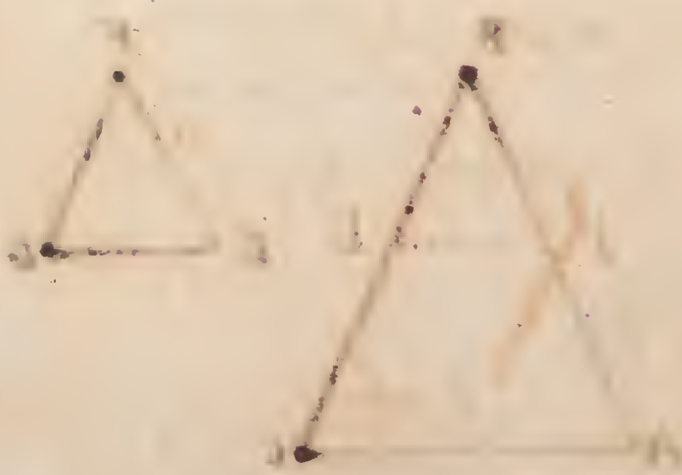
$AB:FE=CB:FG$

Eodem modo si angulus G superimponatur angulo aequali C demonstrabitur

$CB:FG=AC:EG$, unde (axiom: 1) erit

$AB:FE=AC:EG$: igitur latera aequalibus angulis opposita proportionalia erunt, videlicet

$AB:EF=AC:EG=BC:FG$, et alternando (secunda ~~parte~~ prop: 3 libri 1) erit



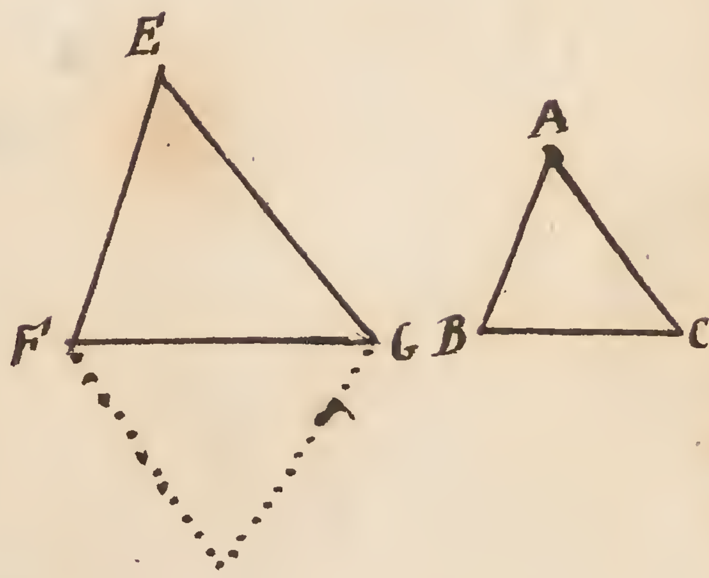
AB:AC = EF: EG, et
AC: BC = EG:FG, et
AB:BC = EF:FG Quod erat demonstrandum
est prop: 4 libri 6 Euclidis

Corrolarium

Hinc recta IL parallela lateri AC secat triangulum IBL simile integro triangulo ABC

Propositio octava
Theorema

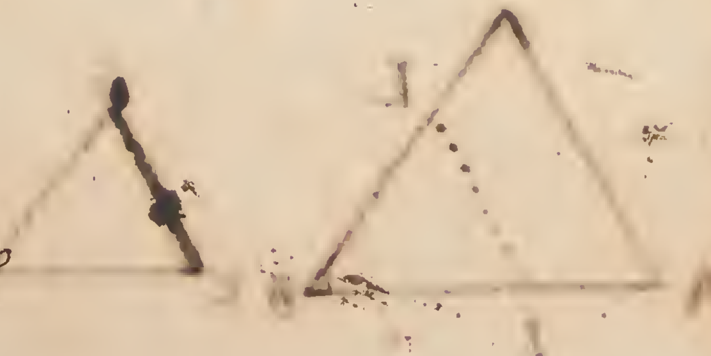
Triangula quae habent latera proportionalia sunt aequiangula



Duo triangula ABC, EFG, habeant latera proportionalia
AB: BC = EF: FG, et
AC: CB = EG: FG etc. habebunt angulos aequales, quibus opponuntur latera omologa; nempe A = E B = EFG, et C = EGF
Supra FG, ad punctum F construatur angulus GFL = B (prop: 10 libri 2)
et ad punctum G fiat angulus FGL = C
erit (cor: 7 prop: 24) reliquus angulus L = A

Demonstratio

Duo triangula ABC, FGL (construct.) aequiangula (prop. ant.) habebunt latera proportionalia; erit nempe
AB: BC = FL: FG, et
AC: CB = LG: FG sed (hypoth.) est
AB: BC = FE: FG, et AC: CB = EG: FG, ideoque (axio: 1) erit
FL: FG = FE: FG et



L G : FG = EG : FG consequenter (cor: 2 prop: 3 libri 1) erit FL = FE, et LG = EG; est insuper FG basis communis duobus triangulis EFG, FLG, ideoque (prop: 9 libri 2) ipsa triangula habebunt angulos æquales scilicet E = L, EFG = LFG, et EGF = LGF. Sed (construct) est angulus LFG = B, angulus LGF = C, et L = A; ergo (axio: 1) erit angulus A = E, angulus B = EFG, et angulus C = EGF. Quod erat ostendendum et

Est prop: 5 libri 6 Euclidis

Propositio 9na

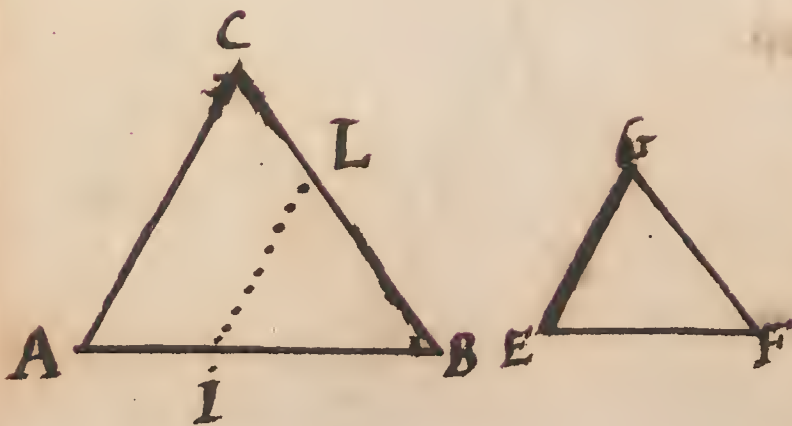
Theorema.

Triangula (ABC, EFG) habentia angulum (B) æqualem angulo (F) et latera eosdem angulos constituentia proportionalia (scilicet AB : EF = BC : FG), habebunt reliquos angulos æquales (A = E, C = G), quibus opponuntur latera proportionalia, atque similia erunt ipsa triangula.

Ex lateribus BA, BC (prop: 3 libri 2) secentur partes BI = EF, BL = FG, et ducatur IL.

Demonstratio.

Duo triangula ~~ABC~~ ILB, EFG (construc) habent latus BI = E, BL = FG, et (hypoth) angulum BF. ideoque (prop: 6 libri 2) erit latus IL = EG, angulus LIB = E et angulus ILB = G; est autem (hypoth) AB : EF = BC : FG, unde substituendo æqualia pro æqualibus erit



$AB:BI=BC:BL$, et dividendo (prop: 5 libri 1) erit
$AB-BI:BI=BC-BL:BL$, hoc est
$AI:BI=CL:BL$; proindeque (secunda parte prop: 2) recta LI erit parallela lateri CA, et (secunda parte prop: 21 libri 2) erit angulus externus ILB=C interno et angulus LIB=A; sed jam demonstravimus angulum ILB=G, et angulum LIB=E. consequenter (axio: 1) erit angulus A=E, et angulus C=G, atque (prop: 7) triangula ABC, EFG erunt similia. Quod erat demonstrandum.
Est prop: 6 libri 6 Euclidis.

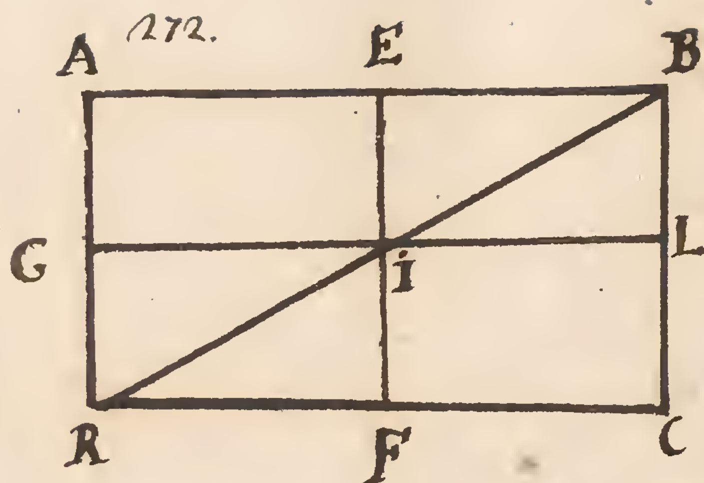
Propositio 10ma

Theorema

Si per quodlibet punctum (I) diametri (BR) in parallelogrammo AC ducantur duae rectae GL, FE parallelae lateribus ejusdem parallelogrammi, ipsae rectae divident totum parallelogrammum in quatuor parallelogramma quorum duo GF, et BL, quae sunt circa diametrum BR, erunt similia toti (AC) et inter se, reliqua vero duo parallelogramma GE, et FL, quae dicuntur complementa eorum quae sunt circa diametrum erunt aequalia inter se.

Demonstratio primae partis.

In triangulo BRC recta IL (hypoth.)



parallela lateri RC (cor: prop: 7)
secat triangulum ILB simile toti
BRC
similiter in triangulo ARB recta EI
(cor prop: 7) abscindit triangulum
EIB simile triangulo ABR, ideoque
(defin: 1) erit
RC: ACB = IL : LB, et
AR : AB = EI : EB
Item CB : BR = LB : BI, et
BR : BA = BI : BE, atque (prop: 6 libri 1)
ordinando erit
CB : BA = LB : BE, unde aequalibus aequalia
substituendo erit etiam
AR : RC = EI : IL, itaque parallelogramma
AC, EL habent latera proportionalia, habent
praeterea angulos aequales a lateribus
proportionalibus contentos (quia secunda
parte prop: 21 libri 2) est angulus
A = IEB, angulus C = ILB, et angulus
ARC = EIL, quia (prop: 28 libri 2) sunt
ambo aequales opposito angulo
communi ABC, ergo (defin: 1) para-
-llelogrammum ER erit simile para-
-llelogrammo AC cui eodem
modo simile demonstratur parallelo-
-grammum GF (consequenter (
cor: defin: 1) erit etiam parallelogrammum
EL simile parallelogrammo GF.
Quod erat primo.
Est prop: 24 libri 6 Euclidis.

Demonstratio 2dae partis

Diameter BR (prop: 28 libri 2) dividit parallelogramma AC, GF, EL bifariam. est nempe ΔBAR=ΔBCR, ΔIGR=ΔIFR, et ΔEIB=ΔILB. atque ab aequalibus triangulis ABR, BCR auferendo aequalia triangula, IGR, EIB ex primo, et IFR, ILB ex altero (axio: 3) remanebit parallelogrammum GE, aequale parallelogrammo FL; scilicet complementa erunt aequalia. Quod erat secundo demonstrandum. Est prop: 43 libri 1 Euclidis.

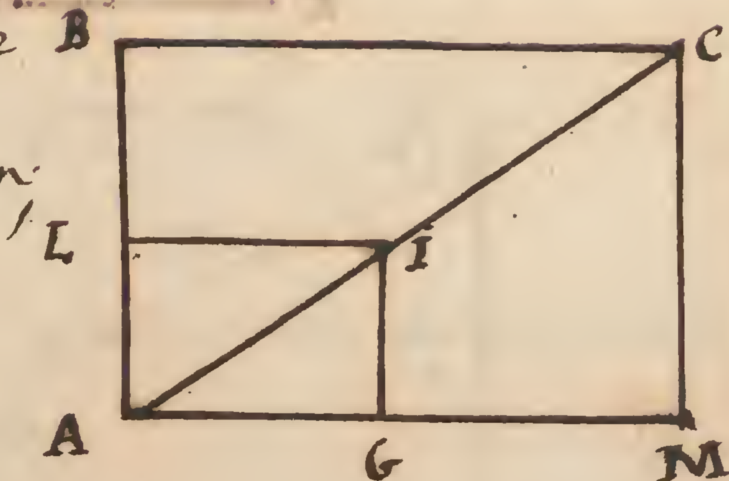
Corrolarium

Hinc si datum parallelogrammum fuerit quadratum, etiam parallelo-gramma circa ejus quadiametrum erunt quadrata, quia per primam demonstrationem sunt similia eidem parallelogrammo dato.

Propositio 11ma

Theorema

Parallelogramma similia, similiterque posita, et habentia angulum com-munem, erunt circa eandem diametrum.



Duo parallelogramma BM, LG habeant angulum A communem, sint similia et similiter posita, videlicet sit angulus B=ILA, et latera proportionalia: AB:BC=AL:LI &c.; dico diametrum

AI esse parem diametri AC.

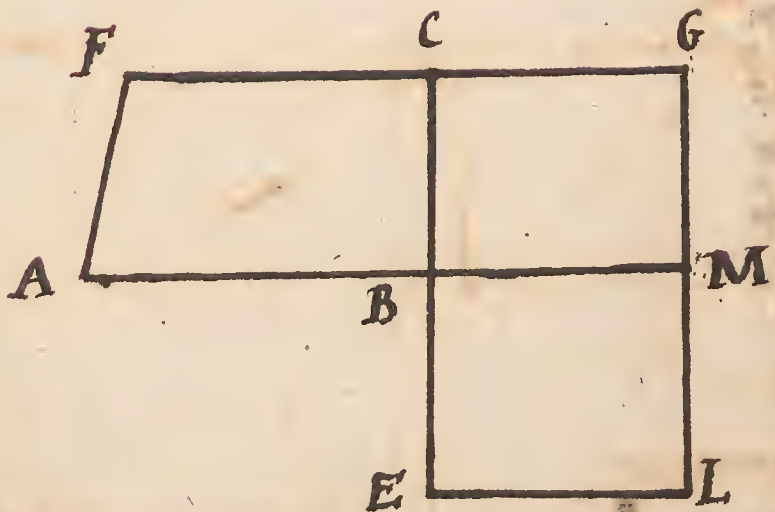
Demonstratio

Nam (hypothesi) est angulus B=ILA, et latera eosdem angulos efficientia, sunt proportionalia, scilicet AB:BC=AL:LI: ergo (prop: 9) erit angulus CAB=IAL; sed latus AL, est pars lateris AB; quia angulus A est communis utrique parallelogrammo, ideoque etiam latus AI erit pars lateris AC. Consequenter parallelogramma BM, et EG circa eandem diametrum AC constituta erunt. Quod erat de=monstrandum.

Est prop. 26 libri 6 Euclidis

Propositio 12[ma]

Theorema





Parallelogramma aequalia (AC,BL) habentia angulum (ABC) aequalem angulo EBM) habebunt latera circa aequales angulos reciproce proportionalia sive erunt figurae reciprocae (erit nempe AB:BM=BE:BC).

E converso, si circa aequales angulos (ABC, EBM) habentur latera reci=proce proportionalia (AB:BM=BE:BC), parallelogramma erunt aequalia, (scilicet erit □AC= □BL).

Latera AB, BM, ita in directum ponantur, ut aequales anguli

ABC, EBM; sint oppositi et (Cor: prop: 17 libri 2) reliqua latera BC, BE, etiam in directum jacebunt: Deinde producantur latera FC, LM, donec alicubi concurrant, ut in G.

Demonstratio 1ma partis

Ex hypotesi est □AC=□BL, ideoque (Cor: 4 prop: 2 libri 1) erit
□AC:□BG=□BL:□BG, sed (prop: 1) est
□AC:□BG=AB:BM
□BL:□BG=BE:BC, Ergo axio 1 erit
AB:BM=BE:BC. Quod erat primo demonstrandum.

Demonstratio 2dae partis

Habemus ex hypotesi AB:BM=BE:BC sed (prop: 1) est
□AC:□BG=AB:BM, et
□BL:□BG=BE:BG, ideoque (axio: 1) erit
□AC:□BG=□BL:□BG, consequenter (Cor 2 prop: 3 libri 1) erit parallelogrammum AC aequale parallelogrammo BL. Quod erat secundo demonstrandum.
Est prop: 14 libri 6 Euclidis

Corrolarium

Hinc triangula aequalia ABC, EBM circa aequales angulos CBA, BM, BE habebunt latera reciproce proportionalia, scilicet
AB:BM=BE:BC.

atque vicissim si habuerint latera
circa aequales angulos reciproca
proportionalia ~~~~~ ipsa triangula
erunt aequalia. Triangula enim
ABC, EBM (cor. 1 prop. 13 libri 1)
eandem inter se rationem habent,
quam parallelogramma FB, BL,
quorum (prop. 28 libri 2) sunt
dimidia.

Est prop. 18 libri 6 Euclidis

Propositio 13[ta]

Problema.

Super data recta (AB) terminata
polighonum describere, dato polighono
(EFGC) simile, similiterque positum.
Ex quovis angulo F rectilinei, seu
polighoni dati ad singulos angulos
oppositos ducantur lineae diagonales
ut FC quae polighonum in triangula
dividant. Postea supra datam AB
(prop. 10 libri 2) constituantur anguli
LBA = FEC, et LAB = FCE, atque
(cor. 1 prop. 24 libri 2) erit reliquus
angulus x = z. Similiter supra AL
fiant anguli t = s, et v = m erit
reliquus angulus I aequalis reliquo
G atque ita progrediendo, si poligho=
=num datum plura contineat triangula,
erit ABLI quaesitum polighonum.

Demonstratio.

Triangula AIL, GFC (constructione)
sunt aequiangula, ideoque (prop. 7)

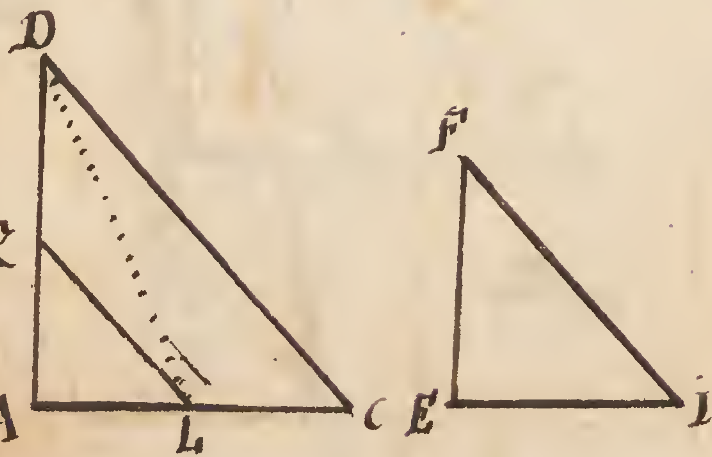
✱ non va qui

erit
AI : AL = CG : CF' et similiter in triangulis
ABL, EF'C (constructione) aequiangulis, erit
AL : AB = CF' : CE, et proindeque ordinando
(prop. 6 libri 1) erit
AI : AB = CG : CE; eodem modo demonstratur
BL : BI = CF' : FG. praeterea (prop. 7)
est
LI : IA = F'G : GC, et
AB : BL = CE' : EF', unde latera sunt propor=
=tionalia; anguli vero (construc.)
sunt aequales B = E, I = G, IAB = GCE,
et ILB = GF'E. ergo (defin. 1) poligho=
=num ILBA erit simile polighono
E'F'GC, et eodem modo descriptum
supra datam AB. Quod erat propositum
est prop. 18 libri 6 Euclidis.

Propositio 14ta

Theorema

Triangula similia sunt inter se in
duplicata ratione, hoc est, ut quadrata
laterum omologhorum.



Sint duo triangula similia ABC, EF'I
quae nempe (defin. 1) habeant angulos A
aequales B = F', A = E, C = I et latera
proportionalia
AC : EI = AB : EF' = BC : F'I, dico triangulum
ABC ad triangulum EF'I habere
rationem duplicatam lateris AC ad
latus EI, vel lateris AB ad latus EF', quia
erit nempe

$\Delta ABC : \Delta EFI = \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, vel $= \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$ Sit Triangulum EFI super impo=natur triangulum ABC, ita ut punctum E cadat in A, et latus EF cadat in AZ supra latus AB, alterum latus EI propter aequalitatem angulorum A et E cadet supra AC, ut in AL, et latus FI cadat in ZL. Deinde jungatur recta LB.

Demonstratio.

Triangula ABC, ABL, habentia communem verticem B, et bases AC, AL in eadem recta AC (cor: defin: 14.) sunt scoque alta. Similiter sunt aeque alta duo triangula ALB, AFZ, quia habent bases AB AZ in eadem recta AB, et ad verticem communem L: sed triangulas ABC, ABL, ALZ sunt quantitates homo=geneae (ant: num: 26.): ideo ratio primi ABC, ad tertium ALZ (prop: 16. libri 1 composita est ex rationibus intermediis primi ABC ad secundum ABL, et secundi ABL ad tertium ALZ, sed (secunda parte prop: 7) est ratio trianguli ABC ad triangulum aeque altum ABM coequalis rationi basi AC ad basim AL, et $\Delta ABL : \Delta ALZ = AB : AZ$. Proindeque ratio primi trianguli ABC ad tertium ALZ (sive ad aequale triangulum EIF) componitur ex duabus rationibus AC : AL et AB : AZ idest ~~enim~~ ex rationibus

AC : EI, et AB : EF (est enim AL = EI, et AZ = EF per constructionem); sed (hypothesi) est

AC : EI = AB : EF ergo ratio trianguli ABC ad triangulum EIF componitur ex duabus coequalibus rationibus AC : EI et AB : EF, ideoque (cor: 1 defin: 7 lib: 1) erit duplicata utriusque scilicet cor: 2 defin: 7 libri primi) erit

$\Delta ABC : \Delta EIF = \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, vel $= \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$ vel etiam $= \overline{BC}^2 : \overline{FI}^2$ (prop: 13 libri 1, et axio: 1) quia (hypothesi) est

AB : EF = BC : FI = AC : EI Quapropter triangula similia etc. Quod erat demonstrandum

Est prop: 19 libri 6 Euclidis.

Corollarium primum

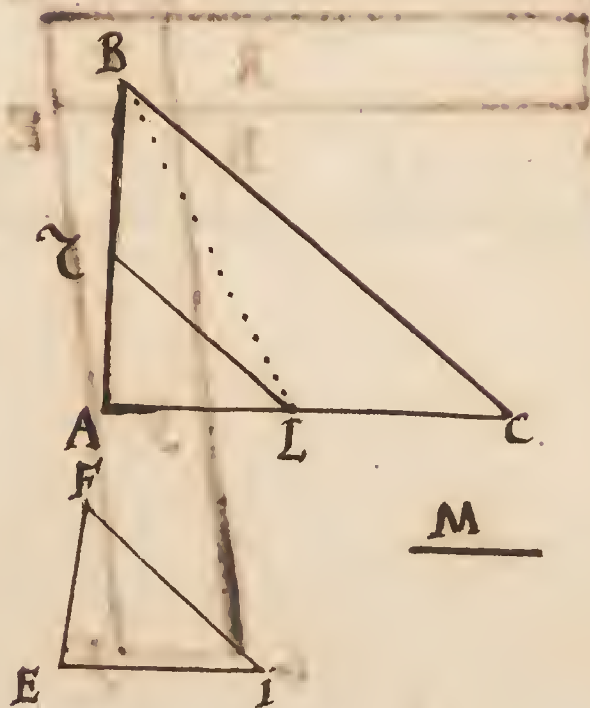
Si duabus rectis AC, EI (prop: 5) inveniatur tertia proportionalis L, erit prima AC ad tertiam M, sicut triangulum ABC ad simile triangulum EIL: nam cum sit (constructi)

∺ AC : EI : M, ideo (cor 4 prop: 2 libri 1) erit

$AC : M = \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, et per antecedentem demonstrationem habemus

$\Delta ABC : \Delta EIF = \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$; itaque (axio: 1) erit

AC : M = Δ ABC : Δ EIF, scilicet prima linea ad tertiam ut triangulum ABC supra primam descriptum ad



simile triangulum EIFI supra secundam
EI similiter descriptum.

Corolarium 2dum

Quoniam (demonstr.) est
$\Delta ABC : \Delta EIF = \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, ideo si latus
AC fuerit duplum lateris omologi
EI, triangulum ABC erit quadruplum
trianguli EIF. Si latus AC fuerit
decuplum lateris EI, triangulum ABC
centum vices continebit triangulum
EIF &c.

Propositio 15ta

Theorema



Parallelogramma aequiangula (R, S)
sunt inter se in ratione composita
ex rationibus laterum (AB : BE et
BC : BG) aequales angulos constituentium
erit nempe
$R : S = AB \times BC : BE \times BG$.
Latera BE AB ita in directum
ponantur ut anguli aequales ABC,
EBG sint oppositi, et (cor. prop: 11 libri 2)
latera CB, BG etiam in directum
jacebunt, producantur BG FE, donec
concurrant ut in L.

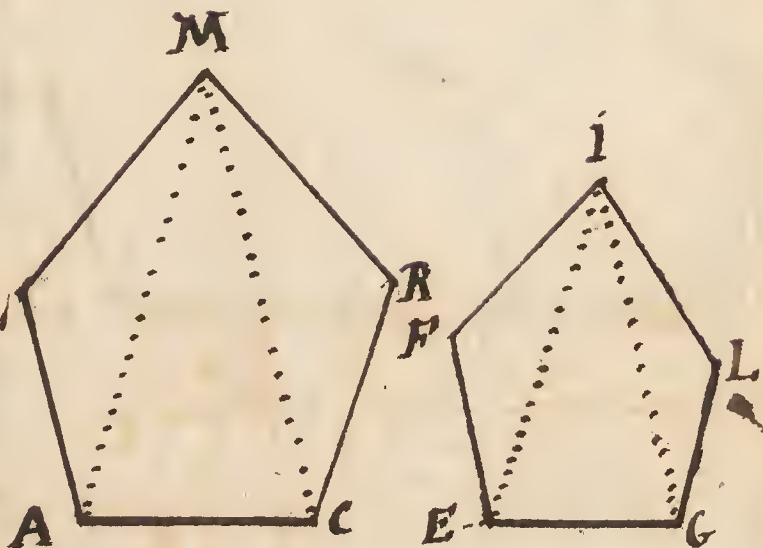
Demonstratio

Parallelogramma R, X et S (ajr. nu: 26)
sunt quantitates ejusdem generis
unde (prop: 16 libri 1) ratio primi R
ad ultimum S composita erit ex
intermediis rationibus primi R

ad secundum X, et secundi X ad tertium S. At (prima parte prop: 1) est
□R: □X = AB: BE, et
□X: □S = CB: BG, proindeque ratio parallellogrammi R ad parallellogrammum S composita erit ex duabus rationibus AB: BE, et CB: BG; scilicet (cor 3 defin: 6 libri 1) erit
□R: □S = AB×CB: BE×BG. Quod erat ostendendum.
Est prop: 23 libri 6 Euclidis.

Propositio 16ta

Theorema



Polighona similia CABMRC, EFILG) sunt inter se in duplicata ratione sive ut quadrata, laterum omologhorum (erit nempe polighonum ABMRC ad polighonum EFILG = $\overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$ vel = $\overline{CR}^2 : \overline{GL}^2$ etc.).
Ab aequalibus angulis M, et I ad angulos oppositos ducantur rectae MA, MC, IE, IG etc: quae polighona in triangula similia, et numero aequalia secabunt.

Demonstratio

Quoniam (hypotesi) polighona sunt similia ideo (defin: 1) est angulus B=F, et latera proportionalia AB: BM = EF: FI; ideirco (prop: 9) triangula ABM, EIF erunt similia. Eodem modo similia demonstrantur

triangula MRC, ILG

Praeterea si ab angulis (hypotesi) aequalibus CAB, CEF, auferantur anguli MAB, IEF (demonstr:) aequales (axio: 3) remanebit angulus CAM aequalis angulo IEG sed (hypotesi) est
$BA:FE=AC:EG$, et (demonstr:) est
$BA:FE=AM:EI$, ideo (axio: 1) erit
$AM:EI=AC:EG$, et (demonstr:) est
angulus $CAM=IEG$, unde (prop: 9) etiam triangula AMC, EIG erunt similia inter se. Similia vero triangula (prop. 14) sunt inter se in ratione duplicata laterum omologhorum; erit igitur

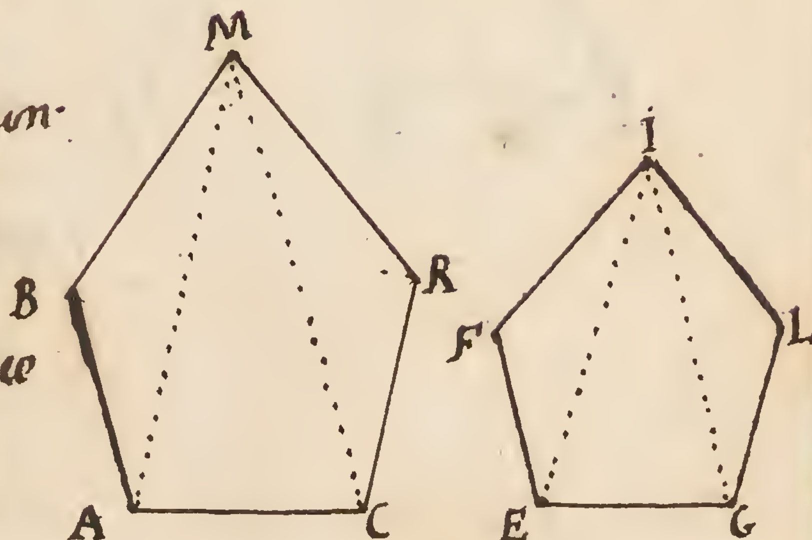


$\Delta ABM : IEF = \overline{AB}^2 : \overline{FE}^2$ et
$\Delta AMC : \Delta IEG = \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$ et
$\Delta MCR : \Delta IGL = \overline{CR}^2 : \overline{CL}^2$, atqui (hypotesi) est
$AB:EF=AC:EG=CR:GL$ &c, scilicet (prop: 13 libri 1)
$\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2 = \overline{CR}^2 : \overline{GL}^2$; ergo (axio: 1) erit
$\Delta ABM : \Delta EIF = \Delta AMC : \Delta EIG = \Delta MCR : \Delta ILG$, et (prop: 8 libri 1) colligendo erit
$\Delta ABM : \Delta EIF = \Delta ABM + \Delta AMC + \Delta MCR : \Delta EIF + \Delta IEG + \Delta ILG$, hoc est
$\Delta ABM : \Delta EIF$ sicut polighonum ABMRC ad polighonum IFEGL; sed (prop: 14) est
$\Delta ABM : \Delta EIF = \overline{AB}^2 : \overline{FE}^2$, proindeque

(axio: 1) erit polighonum ABMRC ad polighonum IFEGL, sicuti $\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, vel sicuti $\overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$ &c, quia (demonstr:) est
$\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$ &c:
Quapropter (defin 7 libri 1, et cor 2) polighona similia, erunt inter se in ratione duplicata laterum omologhorum.
Quod erat demonstrandum.
Et prop: 20 libri 6 euclidis

Corrolarium

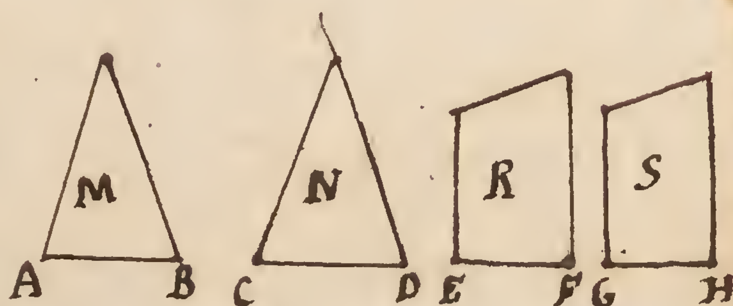
Itaque si fuerint tres recta continuae proportionales
$\div$ AC:EG:M, polighonum supra primam AC descriptum ad polighonum simile, similiterque descriptum supra secundam EG (axio: 1) erit ut prima linea AC ad tertiam M, quia (cor 4 prop: 2 libri 1) est pariter
$AC : M = \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$.



Propositio 17ma

Theorema

Si fuerint quatuor vel plures rectae lineae proportionales (AB:CD=EF:GH), etiam polighona simila, et similiter ab eis descripta proportionalia erunt, nempe (M:N::R:S).
Vicissim si proportionalia fuerint polighona
(M:N=R:S), similia similiterque descripta supra rectas lineas (AB, CD, EF, GH)



triangula (ABL, BLC) similia toti (ABC), et similia inter se.

Demonstratio

Duo triangula ABC, ABL, habent angulum A communem, et angulum rectum ABL (axio: 16) aequalem recto ALB, unde (cor: 4 prop: 24 libri 2) reliquus angulus C, aequalis erit reliquo ABL, ideoque (prop: 7) triangula ABC, ABL erunt similia, erit igitur hypotenusa ad hypotenusam AB, sicuti idem latus AB oppositum angulo C, in triangulo ABC ad latus AL oppositum angulo aequali ABL, scilicet erit

$\div$ AC:AB:AL.

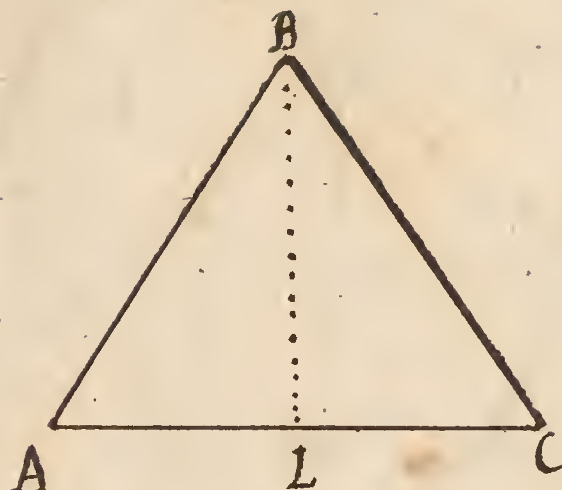
eodem ratiocinio, triangulum ABC demonstratur simile triangulo BLC, habent enim angulum C communem et angulum rectum ABC aequalem recto BLC, proindeque erit reliquus ad A aequalis reliquo angulo CBL, itaque (prop: 7) erit

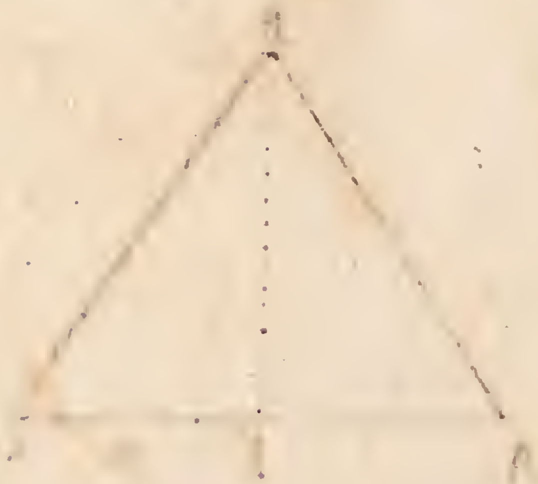
AC:CB=CB:CL idest

$\div$ AC:CB:CL, tandem (cor: defin: 1) similia erunt inter se triangula ABL, BLC: atque (demonstr:) est angulus A=LBC, angulus ALB=BLC, et angulus LBA=C, ideoque (prop: 7) erit

AL:LB=LB:LC, hoc est

$\div$ AL:LB:LC. Quod erat demonstrandum





Est prop: 8 libri 6 Euclidis

Corrolarium 1mum

Hinc quilibet catetus AB, vel AC, est medius proportionalis inter hypotenusam AC et ejus segmentum AL, vel LC interceptum inter eundem catetum, et perpendicularem demissam ab angulo recto ad hypotenusam; demonstravimus enim esse

∺ AC:AB:AL, et

∺ AC:CB:CL, ideoque (cor: prop: 1 libri 1) erit

rectangulum $AC \times AL = \overline{AB}^2$, et

rectangulum $AC \times CL = \overline{CB}^2$, atque dividendo has aequationes per AC (axio: 5) habebitur

$AL = \frac{\overline{AB}^2}{AC}$, et $CL = \frac{\overline{CB}^2}{AC}$: nimirum si quadratum cujuslibet cateti dividatur per hypotenusam, quotiens dabit segmentum hypotenusae interpositum inter eundem catetum, et perpendicularem demissam ab angulo recto ad hypotenusam.

Corrolarium 2dum

Praeterea (demonstr:) est

∺ AL:LB:LC, scilicet perpendicularis BL ab angulo recto ad hypotenusam AC demissam est media proportionalis inter segmenta AL, LC ejusdem hypotenusae atque (cor: prop: 1 libri 1) ergo

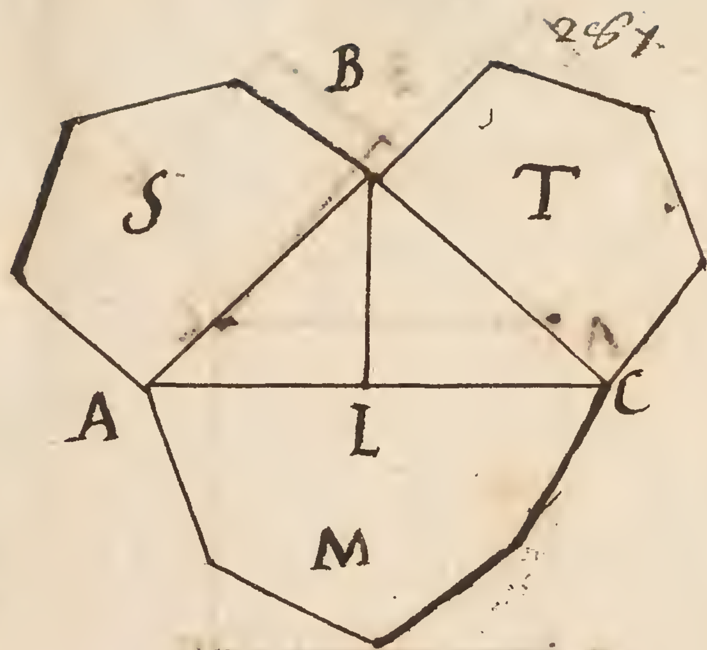
rectangulum $AL \times LC = \overline{LB}^2$

Propositio 19na

Theorema

Si super hypotenusa (AC) cujusvis

trianguli rectanguli (ABC) describatur qualibet figura rectilinea (M), et supra cattetos (AB, BC) describantur duae figurae ST similes eidem figurae (M) et similiter positae, semper erit figura (M) supra hypotenusam descripta aequalis duabus figuris (ST) supra Cattetos descriptis simul sumtis.



Ab angulo recto in B ad hypotenusam AC (prop: 14 libri 2) demittatur perpendicularis BL.

Demonstratio

Quoniam (prop: ante) est

$\div$ AC: AB: AL, ideo (cor: 1 prop: 16) erit rectilineum M supra primam AC descriptum ad rectilineum S descriptum supra secundam AB, sicuti prima AC ad tertiam AL, scilicet erit

M: S = AC: AL.

Similiter, quia (prop: ante:) est

$\div$ AC: CB: CL, ideo (cor: 1 prop: 16) erit

M: t = AC: CL, proindeque duae proportiones

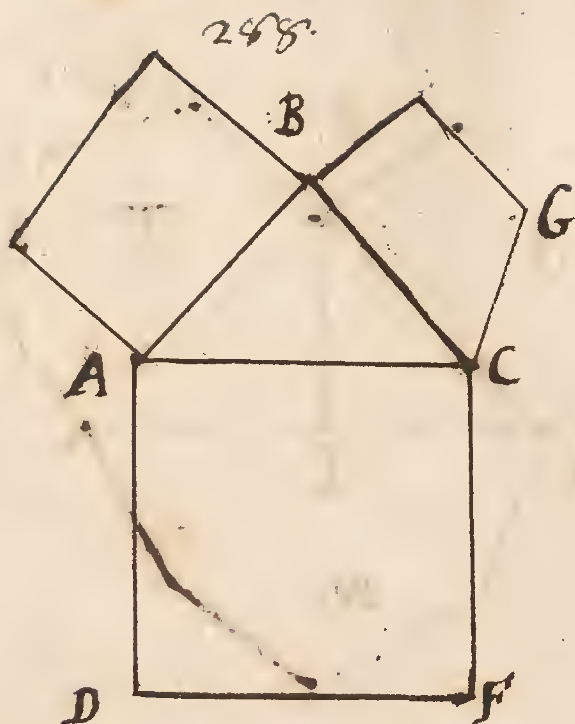
M: S = AC: AL, et

M: t = AC: CL, habent eosdem antecedentes M, et AC, itaque (Cor: prop: 11 libri 1) erit

M: S + t = AC: AL + CL: atqui (axio: 11) est

AC = AL + CL; ergo erit etiam

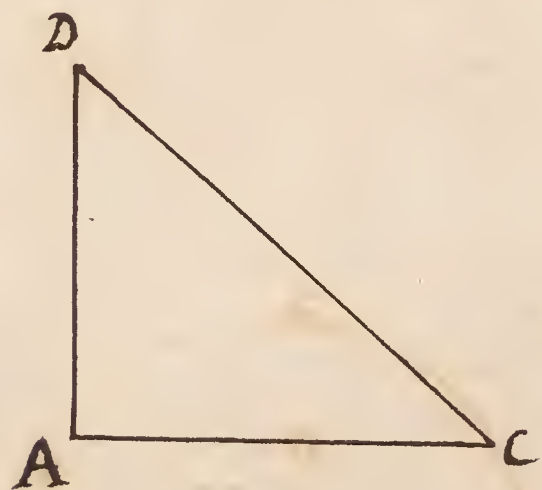
M = S + t. Quod erat demonstrandum.



est prop: 31 libri 6 euclidis

Corrolarium 1mum

Quoniam omnia quadrata (defin: 1) sunt figurae rectilineae similes, ideo in omni triangulo rectangulo ABC, quadratum ex AF hypotenusae AC, aequale erit duobus quadratis AB, BI catetorum AB, BC simul sumtis. est prop: 47 libri 1 Euclidis

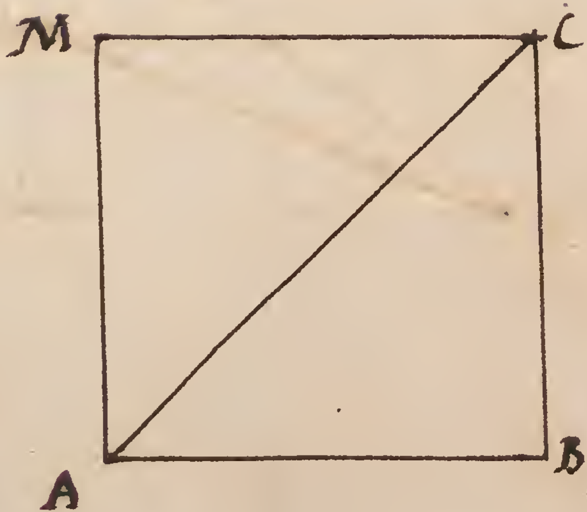


Corrolarium 2dum

Si triangulum rectangulum ACD fuerit Isosceles tunc quadratum hypotenusae CD erit duplum tam quadrati ex cateto AC, quam quadrati ex cateto AD. Nam ex antecedenti corrolario est

$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2$ sed quadrata linearum aequalium AD, AC (ax: n: 142) sunt aequalia inter se; ideo quadratum hypotenusae CD erit duplum tam quadrati ex cateto AD, quam quadrati ex cateto AC. sive erit quadratum hypotenusae CD ad quadratum cateti AD vel AC, sicuti duo ad unum; nimirum

$\overline{CD}^2 : \overline{AD}^2 = 2:1.$



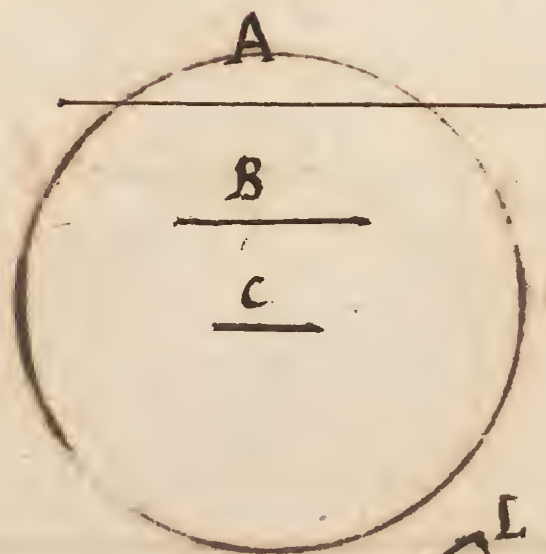
Corrolarium 3tium

Hinc diameter (AC) quadrati (BM) incommensurabilis demonstratur lateri ejusdem quadrati. Etenim in triangulo Isoscele ABC (cor: ante:)

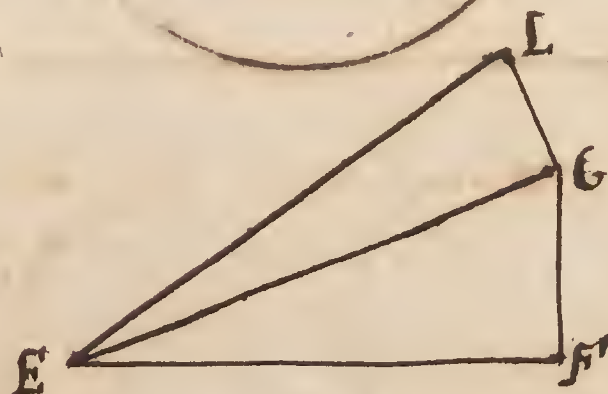
habemus:
$AC^2 : AB^2 = 2 : 1$ et extrahendo radicem quadratam ex singulis terminis proportionis (prop: 13 libri 1) erit
$AC : AB = \sqrt{2} : 1$; sed $\sqrt{2}$ (arit: n:147, 149) est numerus irrationalis, sive incommensurabilis, proindeque diameter AC est ad latus AB, ut numerus irrationalis ad unitatem, consequenter diameter AC non est commensurabilis lateri AB; quia (arit: n: 147, 148) quantitates commensurabiles sunt inter se, ut numerus rationalis ad unitatem vel sicuti numerus rationalis ad alium numerum rationalem.
Est prop: 117 libri 10 Euclidis

Propositio 20ma
Problema

Rectam lineam invenire, cujus quadratum adaequet quadrata plurium linearum A, B, C, &c:



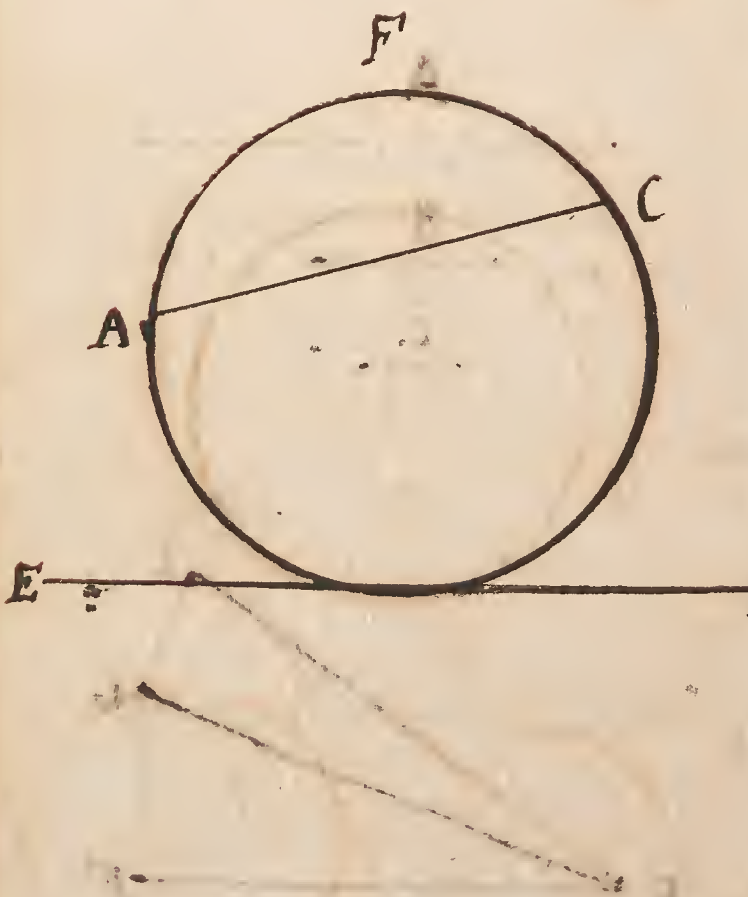
Ducatur in plano recta EF = A, et ad EF (prop: 13 libri 2) erigatur perpendicularis FG = B, et ducatur hypotenusa EG cujus quadratum (cor: 1 prop: ante:) erit aequale duobus quadratis catetorum EF, FG, idest (construc:) linearum A, et B. similiter ad rectam EG erigatur perpendicularis



GL=C, et ducatur hypotenusa EL cujus quadratum (cor. 1 prop. ante.) erit aequale duobus quadratis catetorum EG, GL, sive GE, et C: sed quadratum lineae GE ostensum est aequale quadratis linearum A, et B: ergo quadratum rectae LE adaequat tria quadrata linearum A, B, C simul sumpta: atque ita procedendo si plures fuerint datae rectae semper invenietur quaesita linea. Quod erat propositum.

Elementorum Geometricae Liber quartus

Definitio 1ma



Circuli concentrici dicuntur, qui habent idem centrum.

Circuli vero excentrici sunt illi, qui habent centra diversa.

Definitio 2da

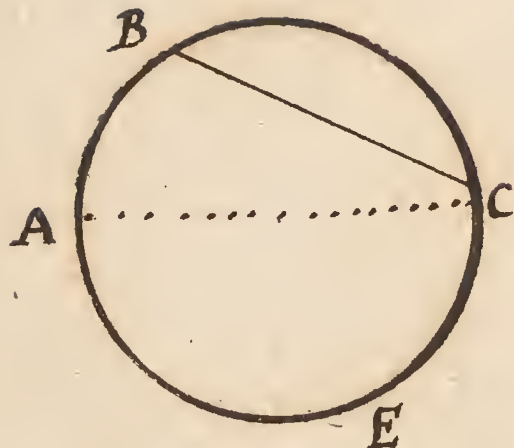
Tangens circuli dicitur linea recta quae circuli peripheriam in unico puncto tangit, et utrinque indefinite producta ipsam peripheriam non secat, ut recta EB, quae circulum tangit in puncto L: angulus contactus dicitur angulus mixtilineus (ELA, BLC) a tangente et a peripheria circuli constitutus.

Definitio 3tia

Circuli aequales sunt illi, qui habent diametros, aut radios aequales, atque mutuo superimpositi congruunt.

Definitio 4ta

Angulus rectilineus (ABC) continens sive instrictus dicitur in circuli segmento (ABC) quando constituitur a lineis rectis (AB)(CB) ductis ex terminis (A et C) ejusdem segmenti ad aliquod peripheriae punctum (B).



Praeterea idem angulus ABC dicitur insistere arcui opposito AEC, quia ejus latera BA, BC, eundem arcum intercipiunt.

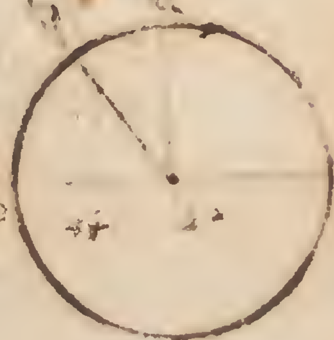
Similiter angulus BCA dicitur instrictus in segmento BCEA, et insistere arcui BA, atque ita de reliquis.

Definitio 5ta

Dato angulo rectilineo (BAB) si centro ejus vertice (A), et quovis intervallo describatur circulus (BCFE) tunc arcus (CELB) interceptus ab anguli lateribus (AB AE) vocetur mensura ejusdem anguli nam quo major est angulus EAB eo major erit arcus oppositus ELB et quo minor est angulus, eo minor erit arcus oppositus, et e converso.







Similiter arcus FE est mensura anguli EAF, et arcus EFC est mensura anguli EAC, et sic de caeteris.



Definitio 6xta

Peripheria cujusvis circuli (CABEL) dividi solet in trecentas sexaginta partes seu arcus aequales, qui arcus vocantur gradus circuli.

Rursus quilibet gradus dividitur in alias sexaginta partes aequales, quae minuta prima circuli dicuntur.

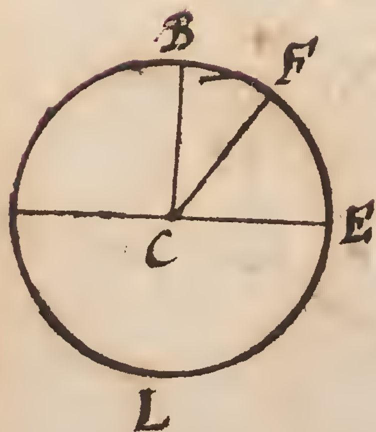
Insuper quodlibet minutum primum adhuc dividitur in alias sexaginta partes aequales quae dicuntur minuta secunda, atque idem intelligatur de minutis tertiis, de minutis quartis &c.

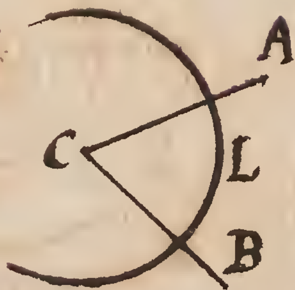
Quapropter semicirculus ABE, vel ALE continebit gradus 180, et quarta pars circumferentiae EB, vel AB continebit gradus 90. Praeterea integer circulus continebit minuta prima 360 x 60, hoc est 21600, et minuta secunda 21600 x 60 scilicet 1296000.



Definitio 7ma

Si ex centro C ad diametrum AB erigatur perpendicularis CB, erit arcus AB aequalis arcui BFE, ut ex ipsa circuli descriptione (defin. 15 libri 2) evidenter patet, et quia linea BC (defin: 9 libri 2) non magis inclinatur versus A, quam versus E; proindeque anguli recti (ACB) mensura et arcus oppositus (AB) graduum 90. Similiter arcus BFE graduum nonaginta est mensura anguli recti BCE, et ita





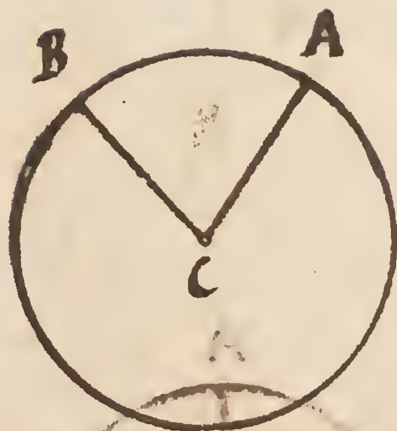
de reliquis
Sed mensura anguli obtusi (ACF), est arcus oppositus ABF major arcu BA gradum 90: Anguli vero acuti (FCE) mensura, et arcus oppositus FE minor arcu BE graduum nonaginta.

Corrolarium

Ergo semicircumferentia (ABE) est mensura duorum rectorum (ACB, BCE) et integra peripheria est mensura quatuor angulorum rectorum.

Definitio 8.tava

Sector circuli est figura mixtilinea plana (CAB) comprehensa a duobus radiis (CA, CB), et ab arcu intercepto (BA) quando angulus (CAB) a radiis contentus est rectus, arcus intercepus (BA) est quarta peripheriae pars (cor: ante:) et sector (ABC) vocatur quadrans circuli, quia est quarta pars integri circuli



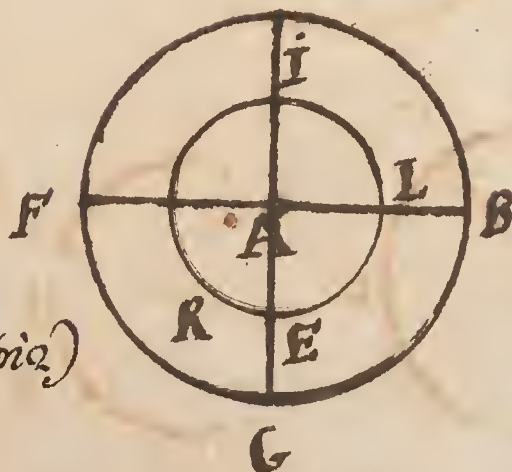
Propositio 1ma

Theorema

Circuli concentrici (BCFG) in (LER) habent peripherias parallellas seu aequidistantes.

Demonstratio

Ex communi centro A ducantur quodlibet radii AB, AC, AF, AG (defin: 15 libri 1) omnes inter se aequales, et ab ipsis auferendo radios seu partes aequales AL, AI, AR, AE, reliquae partes LB, IC



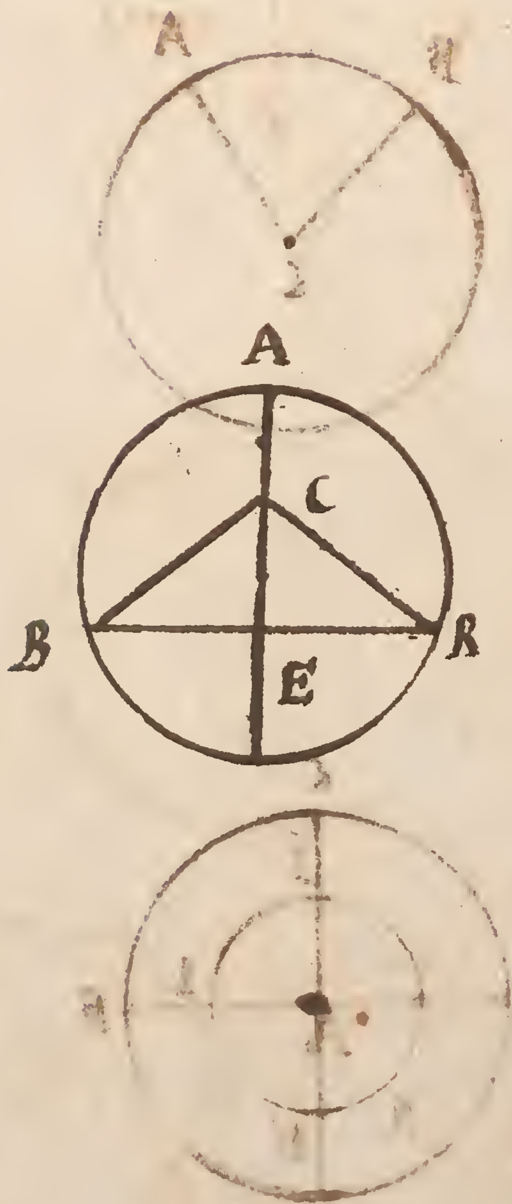
BF, EC erunt omnes aequales inter se, quod ubique semper verificatur, ergo peripheriae BC FG, IR, EL erunt aequidistantes, seu parallelae. Quod erat demonstrandum.

Corrolarium 1mum

Ergo circuli, quorum peripheriae se mutuo secant, non sunt concentrici. Et prop: 5 libri 3 Euclidis

Corrolarium 2dum

Similiter circuli quorum peripheriae se mutuo tangunt, habere nequeunt idem centrum.
Et prop. 6 libri 3 Euclidis.



Propositio 2da

Theorema.

Recta linea (CE) ex centro (C) circuli ad medietatem (E) cujusvis cordae (BR) ducta, perpendicularis erit eidem subtensae (BR).

Vicissim si ex centro (C) ad quamlibet cordam (BR) ducatur perpendicularis linea (CE) ipsam eandem subtensam (BR) bifariam secabit.

Demonstratio 1mae partis.

Quoniam ductis radiis CB, CR in triangulo Isoscele CBR (cor: prop: 25 libri 2) recta CE ex vertice C ad basis medietatem E ducta perpendicularis erit eidem basi BR; ideo patet propositum

Demonstratio 2dae partis

Ductis pariter radiis CB, CR in triangulo
Isoscele CBR, recta CE, ex vertice C perpen=
=diculariter ducta supra basim BR (cor: 2 prop: 25 lib: 2)
ipsam basim BR bifariam secabit
Quod erat secundo demonstrandum

Et prop: 3 libri 3 Euclidis

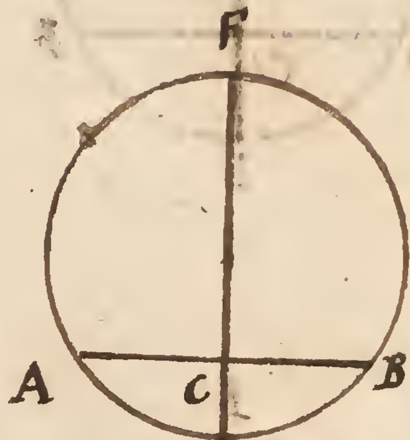
Corrolarium

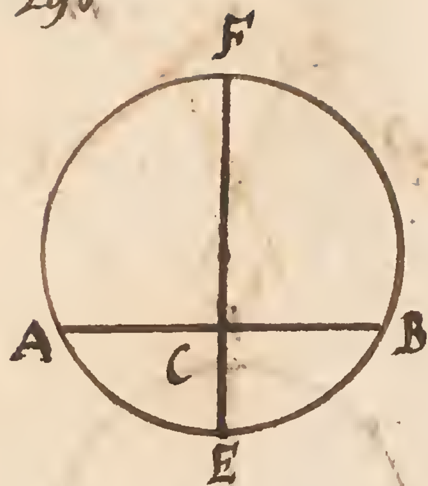
Quoniam ex medietate (C) corde
(AB) unica linea perpendicularis eidem
cordae (cor: prop: 9 libri 2) duci potest
et lineam ex centro ad medietatem
corde ductam (demonstr: 3) perpendicularis
est ad eandem cordam, ideo, si in quolibet
circulo (A, et B) ad medietatem (C)
cujusvis corda (AB) erigatur linea
perpendicularis (CF) ad eandem respiciam.
In ipsa perpendiculari (CF) semper
reperietur centrum circuli, et utique
producta usque ad peripheriam erit
(FE) diameter ejusdem circuli

Propositio 3tia

Problema

Dati circuli (AFBE) centrum invenire
in dato circulo ducatur quaelibet
subtensa AB, quae (prop: 12 libri 2)
bifariam secetur in puncto C ex quo
ad eandem AB (prop: 13 libri 2) erigatur
perpendicularis CF, quae utrinque
producatur usque ad peripheriam in
F, et E. Tandem bifariam dividatur
recta FE in I erit punctum I





quod situm centrum circuli.

Demonstratio.

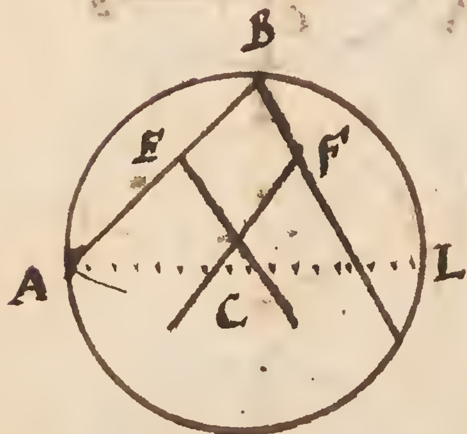
Nam (cor: prop: ante:) recta perpendicularis FE est diameter circuli, ergo (defin: 15) centrum circuli erit punctum I bifariam secans diametrum FE. Quod erat propositum est prop: 1 libri 3 Euclidis.

Propositio 4ta

Problema

Dati arcus (ABL) centrum invenire, ut integra describatur peripheria.

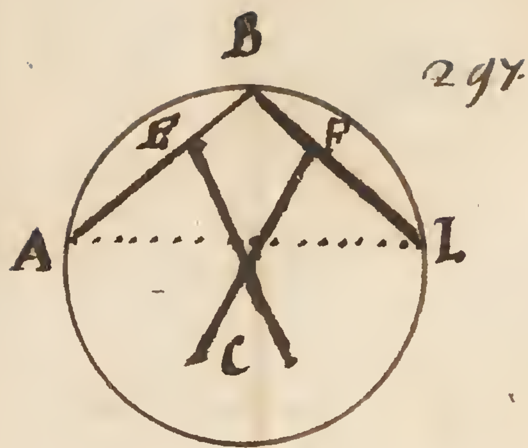
In dato arcu ducantur duae cordae AB, BL, quae (prop: 12 libri 2) bifariam dividantur in E, et F, et (prop: 13 libri 2) ex iisdem punctis ad rectas AB, BL, erigantur perpendiculares EC, FC quae productae (cor: 3 prop: 24: libri 2:) se mutuo secabunt ut in puncto C quod erit quaesitum centrum.



Demonstratio.

Rectae lineae unicum punctum commune habent (cor: prop: 16 libri 2) in quo se mutuo secant sed centrum circuli (cor: prop: 2) reperitur tam in perpendiculari EC quam in perpendiculari FC, ideoque erit punctum C utrique perpendiculari commune, consequenter centro C, et intervallo CA, vel CB complebitur integra peripheria. Quod erat propositum. est prop: 25 libri 3 Euclidis.

Corrolarium.

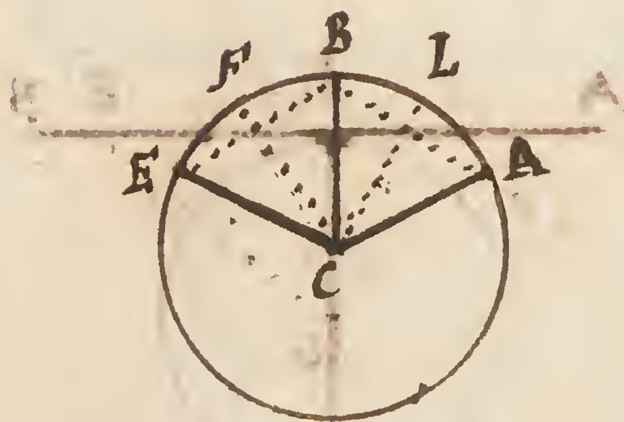


eodem modo circa quodlibet triangulum ABL, sive per tria data puncta A, B, L, non in directum posita (ductis rectis BA, BL) circulus describitur, cujus peripheria transeat per tres angulos, sive per tria puncta data A, B, L, ut per se pat est prop: 5 libri 4 euclidis.

Propositio 5ta

Theorema.

Si ab aliquo puncto (C) intra circulum (EAB) ducta fuerint ad peripheriam tres rectae lineae (CA, CB, CE) inter se aequales, punctum illud erit centrum circuli.



Ducantur subtensa BE, BA, quae (prop: 12 libri 2) bifariam secentur in punctis F et L, a quibus ad punctum C ducantur rectae FC, LC.

Demonstratio.

Duo triangula ALC, CLB, habent latus CL commune, latus LA = LB (construc:) et (ex hypotesi) latus CA = CB ideoque (prop: 9 libri 2) erit angulus CLA aequalis angulo CLB, consequenter (defin: 4 libri 2) recta CL erit perpen=dicularis ad medietatem cordae BA proindeque (cor: prop: 2) centrum circuli erit in perpendiculari CL. similiter duo triangula CFB, CFE, habent singula latera singulis lateribus aequalia, unde anguli CFB, CFE, erunt

298.

aequales, et recti, atque centrum circuli etiam reperietur in perpendiculari FC, ergo centrum circuli erit punctum C utrique perpendiculari LC, et FC commune, quod erat ostendendum

Est prop: 9 libri 13 Euclidis

Corrolarium.

Ergo ex puncto quod nam sit centrum circuli, ad ejus peripheriam plures quam duae rectae inter se aequales duci nequeunt, quia si ducerentur, esset centrum.

Propositio 6ta

Problema

Ad quodvis peripheriae punctum L circuli tangentem ducere. ex puncto L in peripheria dato pervenito ad centrum C ducatur radius LC, vel diameter LF ad quam ex puncto L (prop: 13 libri 1) erigatur perpendicularis AL.B quae erit quaesita linea circulum tangens in unico puncto L

Demonstratio

Ex centro C ad aliud quodcumque punctum E rectae AB, ducatur recta CE atque semper habebitur triangulum CLE (construc:) rectangulum, proindeque angulus rectus CLE (cor: 3 prop: 24 libri 2) major erit angulo acuto CEL, ideoque (secunda parte prop: 24 libri 2) latus CE

majori angulo opp CLE oppositum majus est latere CL opposito angulo minori CEL. est autem CL radius circuli unde recta CE major est radio, et ducta huic ex centro C, ideoque punctum E cadit extra circulum. Eodem ratiocinio reliqua puncta lineæ AB, (excepto L) demonstrantur cadere extra peripheriam. ergo recta AB (defin: 2) est circuli tangens. Quod erat propositum.

Corrolarium I^mum

Itaque recta AB ad extremitatem L radii CL, seu diametri FL perpendicu=laris, est tangens circuli.

Prætereà quia extremitati L diametri FL, unica duci potest perpendicularis (cor: defin: 9: libri 2) ideo una tantum recta circulum tangere potest in eodem puncto. consequenter omnes aliæ rectæ per punctum contactus ductæ, circulum secabunt.

est prop: 16 libri 3 Euclidis.

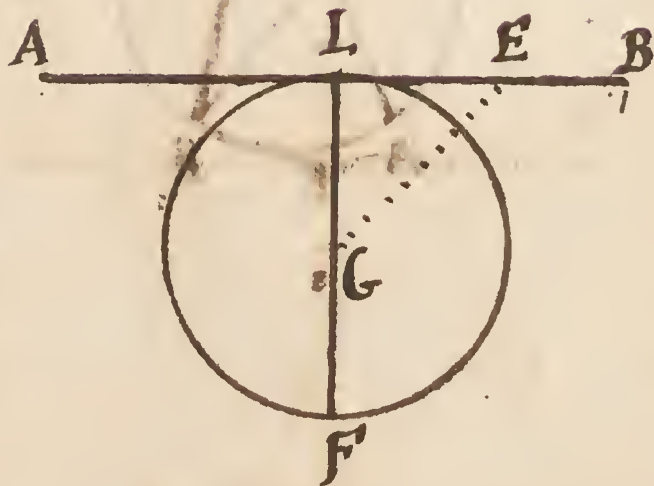
Corrolarium 2^dum

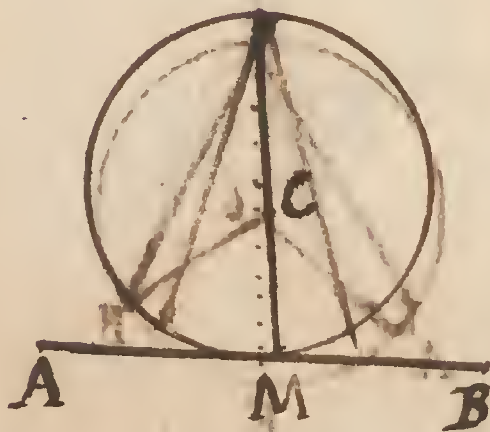
Hinc facillime deducitur rectam CM ex centro C, ad punctum contactus M ductam perpendicularem esse tangenti AB.

est prop: 18 libri 3 Euclidis.

Corrolarium 3tium

similiter patet rectam MC, ex puncto





ipsae rectae lineae proportionales erunt (scilicet erit

$AB : CD = EF : GH$.

Demonstratio 1mae partis

Primo ex hypotesi habemus

$AB : CD = EF : GH$, ideo (prop: 13 libri 1) erit

$\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 = \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$. sed (prop: antece:) polighonia similia sunt inter se ut quadrata laterum omologhorum, nimirum

$M : N = \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, et

$R : S = \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$; ergo (axio: 1) erit

$M : N = R : S$. Quod erat primo demonstrandum.

Demonstratio 2dae partis.

Secundo est ex hypotesi

$M : N = R : S$. sed (prop: anteced.) est

$M : N = \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, et

$R : S = \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$, ideoque (axio: 1) erit

$\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 = \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$, et (prop: 13 libri 1) erit

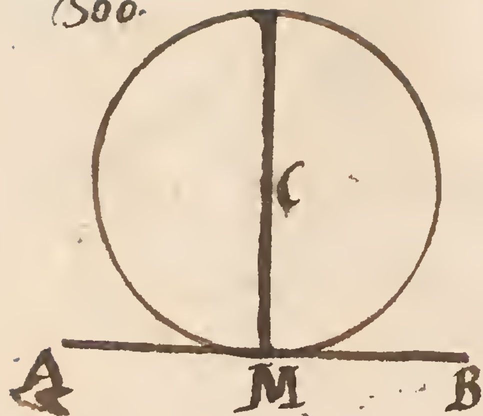
$AB : CD = EF : GH$. Quod erat ostendendum

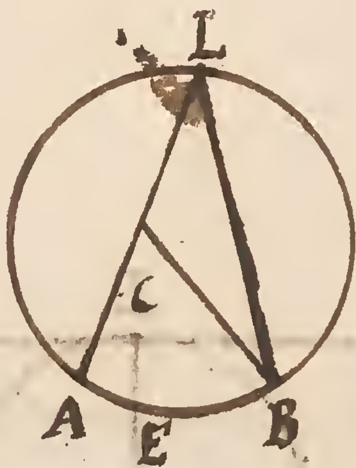
Est prop: 22 libri 6 Euclidis.

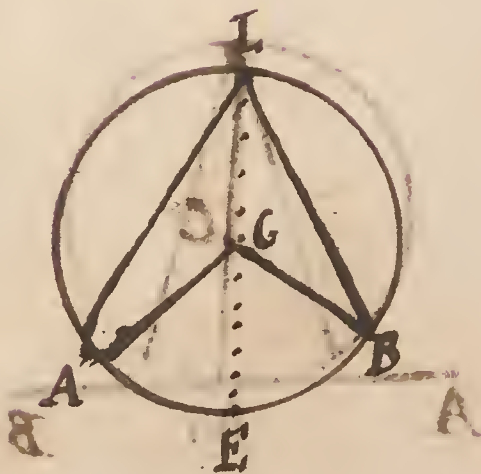
Propositio 18ta

Theorema

In omni triangulo rectangulo (ABC), si ab angulo recto (in B) supra hypotenusam (AC) demittatur perpendicularis linea (BD), ipsa dividet totum triangulum in duo







contactus M ductam, perpendicularem sectam supra tangentem AB transire per centrum circuli est prop: 19 libri 3 Euclidis.

Propositio 7ma

Theorema

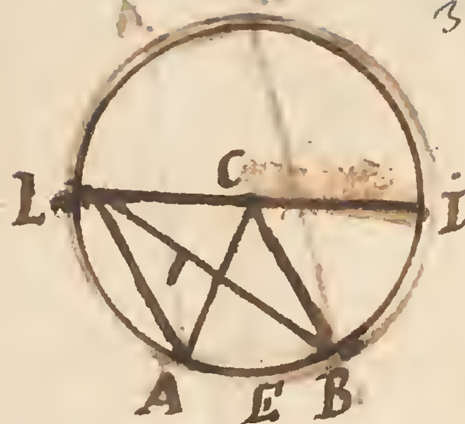
Angulus ad centrum duplus est anguli ad peripheriam, quando insistunt super eodem arcu.

Demonstratio.

Anguli ACB ad centrum, et ALB ad peripheriam insistant super eodem arcu AEB, et duo ipsorum latera CA LA conveniant, erit angulus ACB duplus anguli ALB.

Nam in triangulo, CLB (defin: 13 libri 2) est latus CB = CL, ideo (prop: 23 libri 2) erit angulus CLB, aequalis angulo CBL proindeque Ejusdem trianguli BLC, angulus externus BCA qui (secunda parte prop: 24 libri 2) est aequalis duobus angulis CLB, CBL simul sumtis erit duplus unius CLB, nimirum angulus BCA ad centrum, duplus est anguli BLA ad peripheriam.

Secundo angulorum latera, neque coincidant neque se mutuo secent, et ducatur diameter LE, tunc (demonstr: 1a) erit angulus ACE duplus anguli ALE et angulus ECB duplus anguli ELB ideoque integer angulus ALB, ad centrum angulus duplus erit totius anguli BLA ad peripheriam.



Tertio latus LB anguli ad peripheriam, secet latus AC anguli ad centrum, atque ducatur diameter LI. Ex demonstratis, totus angulus ACI ad centrum est duplus totius anguli ALI ad peripheriam, et pars BCI est dupla partis BLI; ergo (axio: 13) etiam reliquus angulus ACB ad centrum duplus erit reliqui anguli ALB ad peripheriam. Quod erat demonstrandum.

Est prop: 20 libri 3 Euclidis.

Corrolarium 1mum

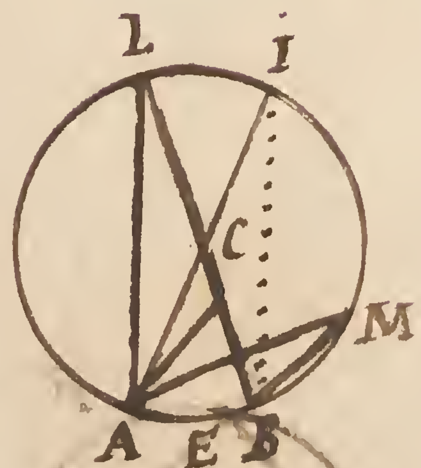
Quoniam (defin: 5) arcus ~~est~~ AEB est mensura anguli ACB ad centrum, et angulus ALB ad peripheriam (demonstr.) est dimidium anguli ACB ad centrum ideo mensura anguli ALB ad peripheriam, erit dimidium arcus oppositi AEB.

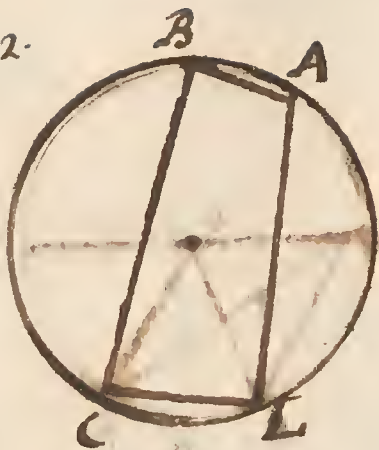
Corrolarium 2dum

Hinc omnes anguli ALB, AIB, AMB etc in eodem circuli segmento ALIMB inscripti, sive insistentis super eodem arcu AEB (axio: 9) erunt aequales inter se, quilibet enim eorundem angulorum, est dimidium ejusdem anguli ACB ad centrum, sive habet pro mensura eundem arcum, scilicet medietatem arcus oppositi AEB, cui omnes insistunt.

Est prop: 21 libri 3 Euclidis.

Propositio 8ctava





Theorema

Quadrilaterum (ABEL) habens omnes angulos in peripheria circuli, habebit angulos oppositos (AFE, vel BL) simul sumtos, duobus rectis æquales.

Demonstratio

Nam angulus BC (cor. 1 prop: ante:) habet pro mensura medietatem arcus oppositi ALC; et angulus L habet pro mensura medietatem arcus oppositi ABC, ideoque duo anguli B, et L, simul sumti habent pro mensura dimidium integræ peripheriæ: sed (cor: defin: 1) dimidium peripheriæ est mensura duorum rectorum; ergo duo anguli oppositi B, et L simul sumti adæquant duos rectos.

Idem verificatur de reliquis duobus angulis oppositis, A, et C simul sumti, ergo quadri=laterum &c. Quod erat ostendendum.

Est prop. 22 libri 3 Euclidis

Corrolarium

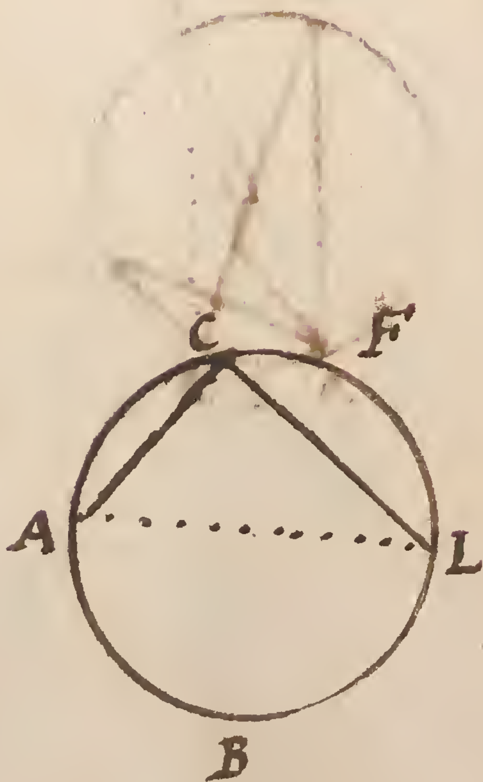
Nullum igitur paralelogrammum obliquangulum potest habere omnes angulos in peripheria circuli.

Propositio 9na

Theorema

Angulus in semicirculo inscriptus semper est rectus.

Sit circulus ABLFC, et ab extremis diametri AL, ad quodlibet semiperipheriæ punctum C ductæ sint duæ rectæ AC, LC, angulus ACL, in semicirculo



ACFL inscriptus, erit rectus.

Demonstratio.

Etenim anguli ACL mensura (cor: 1 prop: 7) est dimidium arcus oppositi ABL, qui (hypotesi) est semicircumferentia, quae (Cor: defin: 7) est mensura duorum rectorum ideoque ejus dimidium erit mensura unius recti: ergo angulus ACL, qui dimetitur a medietate semi circumferentia erit rectus. Quod erat demonstrandum.

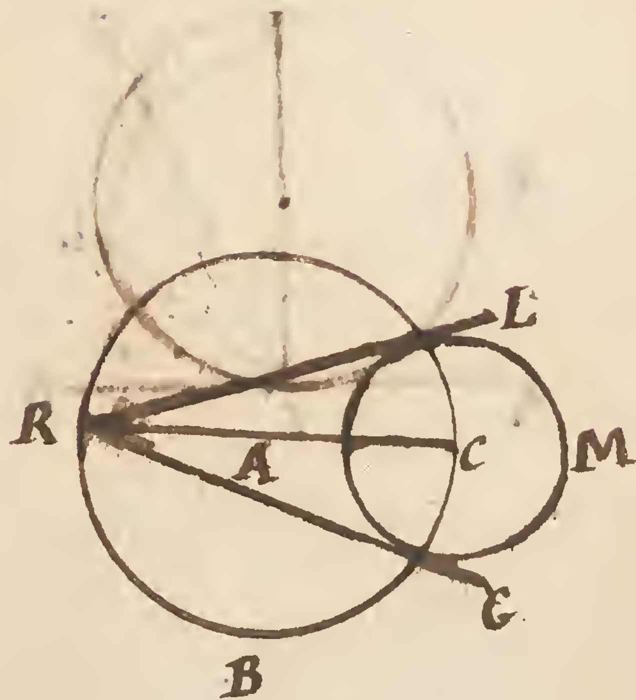
Est prima pars prop: 31 libri 3 Euclidis.

Propositio 10ma

Problema.

A puncto (R) extra circulum (LGM) dato ~~extra~~ rectam circuli tangentem ducere.

Ex puncto R ad centrum C ducatur recta RE, quae (prop: 12 libri 2) bifaria secatur in A, atque centro A intervallo AC, vel AR describatur semicirculus CGBR, et ex puncto G, in quo peripheriae se mutuo secant ad punctum datum R ducatur recta GR, quae erit tangens quaesita.



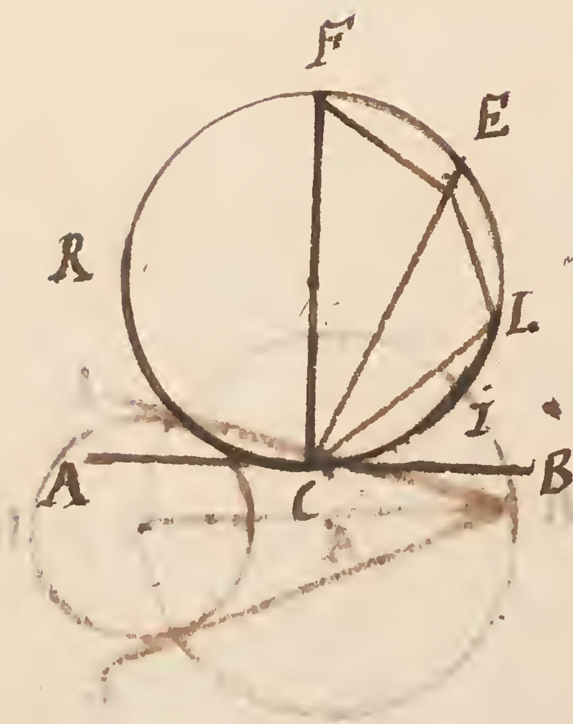
Demonstratio.

Nam, ducto radio EG angulus EGR in semicirculo EGBR inscriptus (prop: ante:) est rectus; ideoque recta GR perpendicularis extremitati radii EG (cor: 1 prop: 6) erit tangens circuli LGM. Quod erat propositum.

Est prop: 12ᵃ libri 3 Euclidis.

Corrolarium

Si ex centro A radio AC describatur alius semicirculus CLR, et ducatur recta LR eodem modo demonstrabitur ipsam rectam LR esse circuli tangentem, consequenter ex dato puncto duæ circuli tangentes duci possunt.



Propositio 11ᵐᵃ

Theorema

Angulus contentus a circuli tangente et a chorda per punctum contactus ducta æqualis est angulo inscripto in opposito seu alteri circuli segmento.

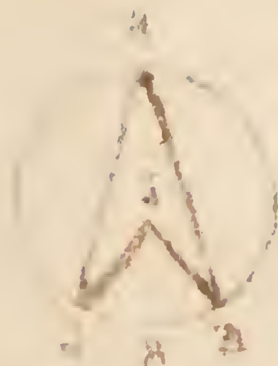
Recta AB circulum tangat in puncto C ex quo ducta sit secans chorda CE. angulus ECB erit æqualis angulo inscripto in segmento CREF, et angulus ECA, æqualis erit angulo inscripto, in alterno segmento CILE.

Ducatur diameter CF, quæ (cor. 2 prop. 6) erit perpendicularis tangenti AB. ducantur etiam subtensæ FE, EL, LC

Demonstratio

Angulus FEC in semicirculo FELIC inscriptus (prop. 9) est rectus in triangulo EFC, reliqui duo anguli EFC, ECF simul sumti (cor: 5 prop: 24 libri 2) unum rectum adæquant; sed duo anguli ECB, ECF (axio: 11) adæquant pariter unum rectum FCB; proindeque

(axio: 1) duo anguli EFG, ECF, aequales erunt duobus ECB, ECF, et demptis communi angulo ECF (axio: 3) remanebit angulus EFC, inscriptus in segmento (EFRC) aequalis angulo ECB contento a tangente CBE, et a corda secante CE: Praeterea in quadrilatero EFCL (prop: 6) duo anguli oppositi CFE, CLE adaequant duos rectos, et duo anguli consequentes ECB, ECA (prop: 13 libri 2) sunt etiam aequales duobus rectis ideoque (axio: 1) duo anguli CFE, CLE aequales erunt duobus ECB, ECA, a quibus auferantur anguli jam ostensi aequales CFE ECB. et (axiomate 3) remanebit angulus CLEC, inscriptus in segmento (CEGIC) aequalis angulo ECA contento a tangente CA et a secante CE. Quod erat demonstrandum. Est prop: 32 libri 3 Euclidis.





Corrolarium

Hinc patet angulum EFE inscriptum in majore segmento CRFE acutum esse et angulum ELC inscriptum in minori segmento ELIC obtusum esse.
Est secunda pars prop: 31 libri 3 Euclidis.

Propositio 12ma

Theorema

In circulis aequalibus (CALBM, EFGR) vel in eodem circulo





anguli aequales, sive ad centra (ACB=EIG) sive ad peripherias (ALB=EFG) constituti supra arcus aequales insistunt, erit nempe arcus ALB, aequalis arcui (ERG)

Quod si arcus fuerint aequales (AMB=ERG) anguli insistentes, sive ad centra constituti, sive ad peripherias, erunt aequales (scilicet ACB=EIG, et ALB=EFG)

Demonstratio 1mae partis

Intelligatur circulus ALBM ita superimponi circulo EFGR, ut centrum C cadat in I, et radius CA cadat supra aequalem radium IE, (defin: 3) cum quo (cor: defin: 5 libri 2) congruet, radius vero CB congruet cum radio GI quia (hypotesi) anguli ACB, EIG sunt aequales, atque puncta A, et B, cadent in E et G, ideoque integer arcus AMB congruet cum arcu ERG, et (axio: 14) erunt aequales inter se.

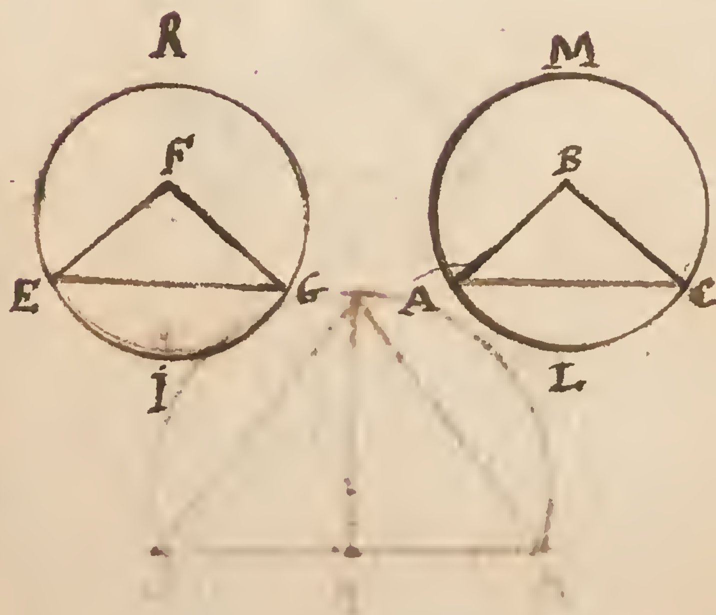
Si autem aequales fuerint anguli ALB, EFG ad peripherias, tunc ductis radiis AC BC EI, GI, etiam anguli ACB, EIG ad centra (axio: 6) aequales erunt inter se, quia (prop: 7) sunt dupli angulorum aequalium ALB, EFG, consequenter ex demonstratis arcus AMB, ERG, aequales erunt inter se. Quod erat primo demonstrandum. Est prop: 26 libri 3 Euclidis.

Demonstratio 2dae partis

Quoniam (hypotesi) arcus AMB est aequalis arcui ERG, et circuli sunt aequales, ideo superimposito circulo ABLM, supra aequalem circulum EFGR, ita ut centra C et I conveniant, et punctum A cum puncto E, arcus AMB congruet cum aequali arcu ERG, et punctum B cadet in G; consequenter congruent radii, CA cum IE, et CB cum IG, atque (axio: 14) angulus ACB erit aequalis angulo EIG. Praeterea (axio: 9) etiam aequales erunt inter se, anguli ALB, EFG ad periphaerias, quia (prop: 7) sunt medietates angulorum aequalium ACB, EIB, ad centra. Quod erat secundo demonstrandum. Est prop: 27 libri 3 Euclidis

Propositio decima tertia
Theorema

In circulis aequalibus (AMCL) (ERGI), vel in eodem circulo, aequales cordae (AC, EG) arcus aequales (ALC = EIG, et AMC = ERG) subtendunt. Vicissim si arcus (ALC, EIG) fuerint aequales, etiam cordae (AC, EG) eosdem arcus subtendentes erunt aequales inter se



Demonstratio 1[ma] partis

Ductis radiis (defin: 3 hujus libri, et defin: 13 libri 2) aequalibus inter se, BA, BC, FE, FG

quia (hypotesi) bases EG sunt aequales, ideo (prop: 9 libri 2) erit angulus ABC = EFG consequenter (prima parte prop: ante:) erit arcus ALC = EIG, et ab integris aequalibus peripheriis auferendo arcus aequales ALC, EIG (axio: 3) remanebit arcus AMC = ERG. Quod erat primum

Et prop: 28 libri 3 Euclidis.

Demonstratio 2da partis

Quoniam (hypotesi) arcus ALC, EIC ponuntur aequales, ideo ductis radiis BA, BC = EF, FG (secunda parte prop: ante:) erit angulus ABC = EFG et (defin: 3) latera BA, BC sunt aequalia lateribus FE, FG: ergo (prop: 6 libri 2) erit basis AC aequalis basi EG, consequenter aequales arcus ab aequalibus cordis subtenduntur. Quod erat ostendendum

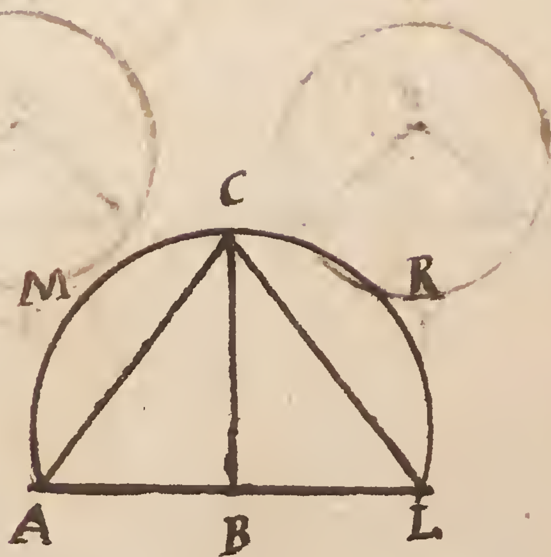
Et prop: 29 libri 3 Euclidis.

Propositio 14ta

Problema.

Datum arcum (ACL) bifariam dividere.

Ducatur corda AL, quae (prop: 12 libri 2) bifariam secetur in B et (prop: 13 libri 2) erigatur perpendicularis BC, quae bifariam secabit in C, datum arcum. Jungantur rectae AC, CL.



Demonstratio

Triangula ABC, CBL circa aequales angulos rectos ABC, CBL habent latus CB commune, et (constru:) latus BA = BL,

ergo (prop: 6 libri 2) erit AC = CL;
proindeque (prima parte prop: ante:) arcus CMA, CRL, subtensi ab æqualibus chordis AC, CL, erunt æquales inter se. Quod erat propositum.
Et prop: 30 libri 3 Euclidis.

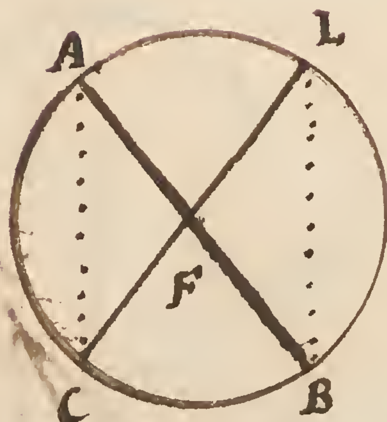
Propositio 15ta

Theorema.

In quovis circulo (ALBC) si duæ rectæ (AB, CL) (a peripheria utrinque terminatæ se mutuo secent, et in F) rectangulum contentum a sectibus AF, FB, unius erit æquale rectangulo contento a partibus CF, FL, alterius rectæ (nimirum erit $AF \times FB = CF \times FL$.

Demonstratio.

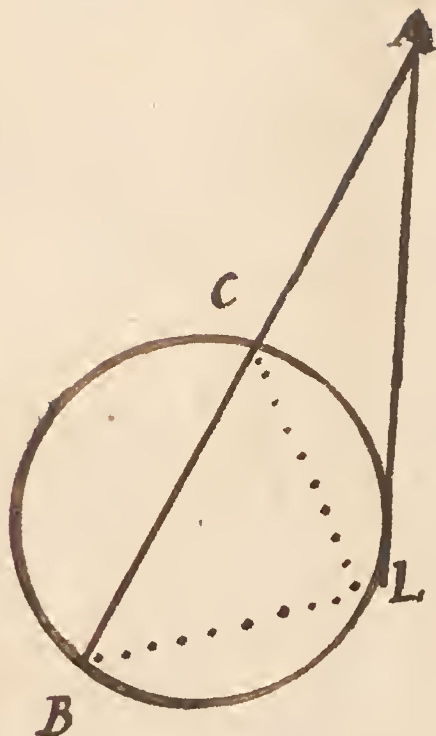
Nam, ductis rectis AC, LB, est angulus AFC = LFB (prop: 17 libri 2); et (cor: 2 prop: 7) est angulus CAB = CLB, quia insistunt supra eundem arcum CB; similiter est angulus ACL = ABL: ideoque triangula AFC, FBL sunt æquiangula; consequenter (prop: 1 libri 3) erit
$AF : FL = FC : FB$, atque (prop: 1 libri 1) erit
$AF \times FB = FL \times FC$. Quod erat demonstrandum.
Et prop: 35 libri 3 Euclidis.



Propositio 16 (xxxvi)

Theorema.

Si ex quolibet puncto (A) extra circulum



(ICLB) ducantur duae rectae, quarum una (AL) circulum tangat, et altera (AB) circulum secet, quadratum tangentis (AL) erit aequale rectangulo contento a tota secante (AB) et ab ejus segmento (AC) extra circulum posito (scilicet erit $\overline{AL}^2 = BA = AC$) ducantur subtensae CL, LB.

Demonstratio.

Angulus CLA contentus a tangente LA, et a chorda secante LC (prop: 11) est aequalis angulo LBC inscripto in alterno segmento CIBL: angulus vero in A communis est duobus triangulis ALB, ALC, ideo (Cor: 7 prop: 24 libri 2) reliquus angulus BLA erit aequalis reliquo ACL, proindeque triangula ALB, ALC erunt aequiangula, et (prop: 7 libri 3) erit

BA: AL = AL: AC, scilicet (defin: 9 libri 1) erit

$\div$ BA: AL: AC, ergo (Cor: prop: 1 libri 1) erit

$\overline{AL}^2 = BA \times AC$ Quod erat ostendendum

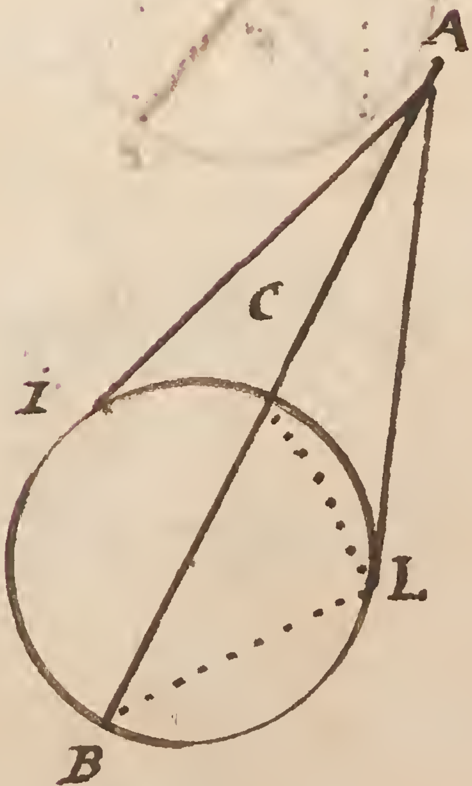
Est prop: 36 libri 3 Euclidis.

Corrolarium 1mum

Ergo tangens AL est media proportionalis inter secantem BA, et ejus segmentum CA positum extra circulum, est enim

$\div$ BA: AL: AC:

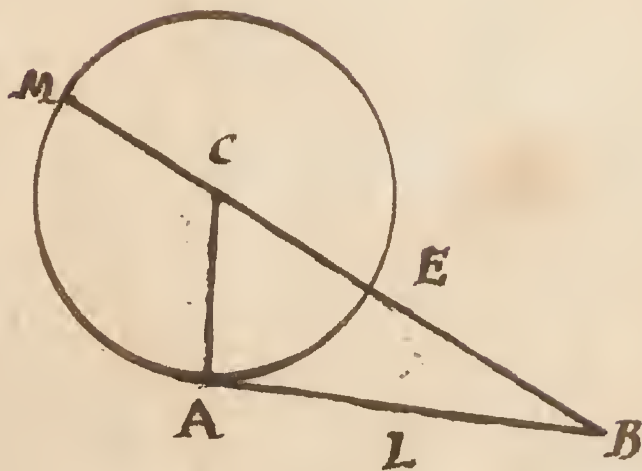
Corrolarium 2dum.



si ex eodem puncto A (cor: prop: 10) ducatur altera tangens AI, eodem modo demonstrabitur esse
$\overline{AI}^2 = BA \times AC$, ideoque (axio: 1) erit $\overline{AL}^2 = \overline{AI}^2$, et (anti: num: 182) habebitur $AL = AI$; Consequenter duae tangentes ejusdem circuli ductae ex eodem puncto extra circulum posito, erunt aequales inter se.

Propositio 17ma.
Problema.

Datam rectam terminatam (AB) ita in duas partes dividere, ut tota ad partem majorem eandem rationem habeat, quam habebit eadem pars major ad minorem. Quod dicitur rectam lineam media, et extrema ratione dividere.
Supra datam AB, et ex puncto A (prop: 13 libri 2) erigatur perpendicularis AC aequalis medietati rectae AB, deinde centro C, radio CA describatur circulus AEM, atque per puncta B, et C ducatur recta BCM, tandem ex data AB secetur portio BL aequalis portioni BE. Dico rectam AB media, et extrema ratione divisam esse in L: scilicet erit
$\div$ AB: BL: LA.



Demonstratio.

Radius CA (construc:) est dimidium rectae BA; item CA (defin: 13 libri 2)

est dimidium diametri EM ideoque
(axio: 6) erit recta BA aequalis diametro
ME: sed recta BA (construct:) perpendi:
=cularis extremitati A, radii AC (cor: 1
prop: 6) est tangens circuli, et linea
BM est circuli secans, unde (cor: 1 prop:
ante:) erit
MB : BA = BA : BE, et dividendo (prop: 5
libri 1) erit
MB − BA : BA = BA − BE : BE: sed
(demons:) est EM = BA, et (construct:)
est BL = BE ideo aequalibus aequalia
substituendo in antecedenti ultima propo:
erit
MB − EM : BA = BA − BL : BL : BA − BL
significat AL, et MB − EM significat
BE, cui substituatur aequalis portio
BL, et habebitur
BL : BA = AL : BL et invertendo (prima
parte prop: 3 libri 1) erit
BA : BL = BL : AL, scilicet
÷ BA : BL : AL, ergo recta AB
divisa est in L media et extrema
ratione. Quod erat propositum.
Est prop: 30 libri 6 Euclidis.

Corrolarium.

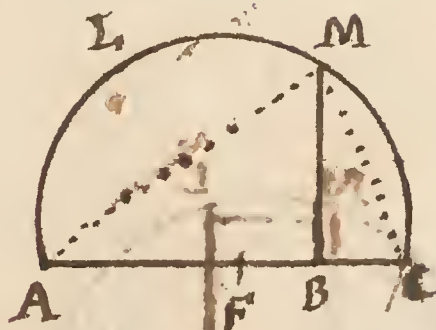
Quoniam (demons:) est
÷ BA : BL : AL, ideo (cor: prop: 1 libri)
erit
$BA \times AL = \overline{BL}^2$. ergo data recta AB
ita divisa est in L, ut rectangulum

est tota AB in partem AL adaequet
quadratum reliquae partis BL.
est prop: 11 libri 2 Euclidis.

Prop: 16ta

Problema.

Datis duabus rectis (AB)(BC) mediam
proportionalem invenire.





Datae rectae (AB, BC) ita in directum
ponantur, ut unicam rectam AC
constituant, quae (prop: 12 libri 2)
bifariam secetur in F, et centro F
radio FA, vel FC describatur semicir-
-culus ALMC, postea ex puncto B
ad rectam AC (prop: 13 libri 2)
erigatur perpendicularis BM quae
alicubi terminetur a periphaeria, ut
in M. erit BM quaesita linea.

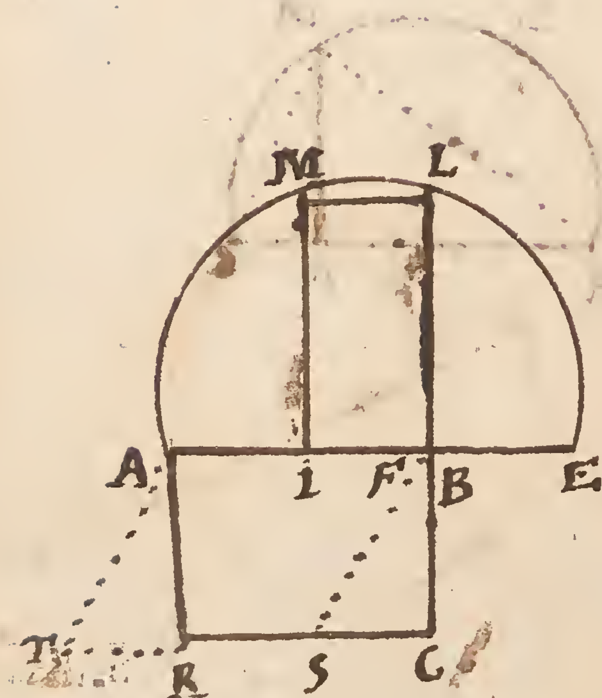
Demonstratio

Ductis subtensis AM, CM angulus
AMC in semicirculo ALM existens
(prop: 9) erit rectus, ergo (cor: prop:
16 libri 3) perpendicularis MB
demissa ab angulo recto ad hypotenusam
AC erit media proportionalis inter
segmenta AB, BC, ejusdem hypotenusae,
erit igitur

÷ AB: BM: BC: Quod erat propositum
est prop: 13 libri 6 Euclidis.

Corrolarium 1mum

Ergo (cor: prop: 1 libri 1) erit
$AB \times BC = \overline{BM}^2$, scilicet in quovis



circulo quadratum ejusdem perpendicularis BM a peripheria ad diametrum ductae aequale erit rectangulo comprehenso a diametri partibus AB, BC in quibus ab ipsa perpendiculari dividitur.

Corrolarium 2^dum^

Quapropter, ut describatur quadratum aequale dato rectangulo AB, CR lateribus AB, BC inveniatur media proportionalis BI, supra quam (prop: 30 libri 2) quia quadratum BM, quod (cor: prop: libri 1) aequale erit rectangulo AB, CR contento a lateribus AB, BC,

Corrolarium 3^tium^

Ut autem describatur quadratum aequale parallelogrammo obliquangulo ABSt, demittantur perpendiculares AR, BC, et (prop: 21 libri 2) habebitur rectangulum AB, CR, aequale parallelogrammo aequiangulo AB, St; unde quadratum BM (cor: ante:) aequale rectangulo ABCR (ancio: 1) erit etiam aequale parallelogrammo obliquangulo AB, St.

Corrolarium 4^tum^

Ergo data qualibet figura rectilinea describetur quadratum aequale ipsi figurae, si dividatur eadem figura in triangula, deinde unicuique triangulo (prop: 24 libri 2) fiat rectangulum aequale, postea (antecedenti

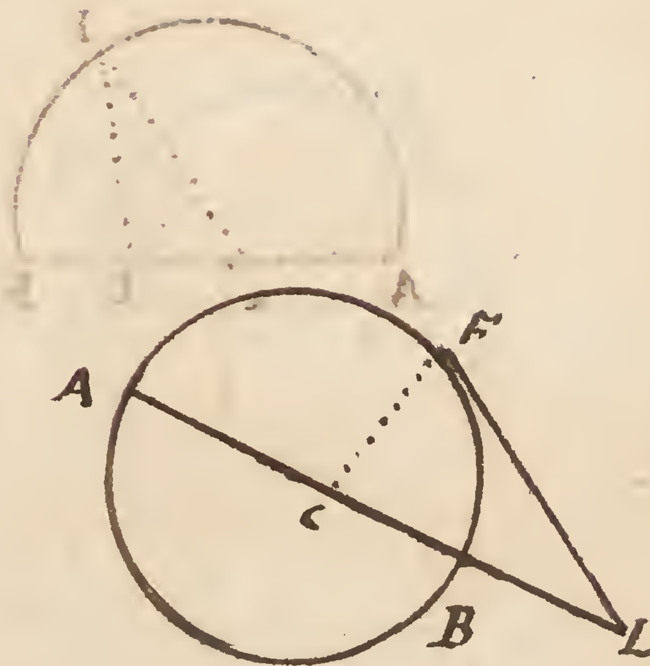
cor: 2) unicuique rectangulo describatur quadratum aequale: tandem (prop:20 libri 3) inveniatur linea, cujus quadratum sit aequale omnibus inventis quadratis simul sumtis et quadratum illum (axio:1) erit aequale rectilineo dato, sed hoc corrolario continetur prop: 14 libri 2 Euclidis

Propositio 16ra

Theorema

Si recta AB bifariam secetur (in C) eique in directum addatur quaelibet alia recta BL, quadratum (lineae CL) dimidiae cum adjecta erit aequale rectangulo (AL × LB) contento ex data cum adjecta AL, et ab adjecta BL, una cum quadrato dimidiae CB.

Centro C, radio CA, vel CB describatur Circulus AFB, et ex puncto L (prop:10) ducatur tangens LF, et ducatur radius CF ad punctum contactus F.



Demonstratio

Recta LF (construc:) est circuli tangens et AL circulum secat; ideo (prop:16) erit

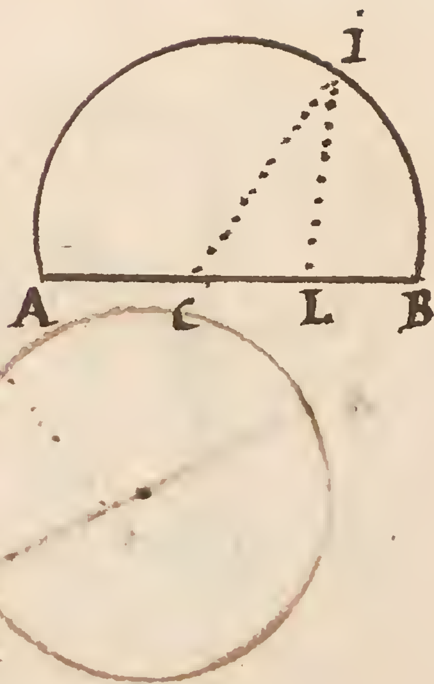
$\overline{LF}^2 = AL \times LB$ addantur quadrata aequalia (arit: n: 162) radiorum CF, CB, et (axio: 2) erit

$\overline{LF}^2 + \overline{CF}^2 = AL \times LB + \overline{CB}^2$, sed (coro: prop:6)

angulus CFL a tangente, et a radio contentus est rectus: proindeque in triangulo rectangulo CFL (cor: prop: 19 libri 3) erit
$\overline{LF}^2 \times \overline{CF}^2 = \overline{CL}^2$; ergo (axio: 1) erit
$\overline{CL}^2 = AL \times LB + \overline{CB}^2$ Quod erat demonstrandum.
est prop: 6 libri 2 Euclidis

Propositio 20[ma]

Theorema



Si recta linea (AB) dividatur bifariam in C (et non bifariam in L) rectangulum $AL \times LB$ contentum a partibus inaequalibus (AL, LB) una cum quadrato intermediae (CL) aequalia erunt quadrato dimidiae CA, vel CB, describatur semicirculus AiB, et ad diametrum AB erigatur perpendicularis Li ducaturque radius Ci.

Demonstratio.

Etenim (cor: 1 prop: 18) est
$AL \times LB = \overline{Li}^2$, addatur utrinque quadratum intermediae LC, et (axio: 2) erit
$AL \times LB + \overline{LC}^2 = \overline{Li}^2 + \overline{LC}^2$. sed (cor: 1 prop: 19 libri 3) in triangulo rectangulo CLi est
$\overline{Ci}^2 = \overline{Li}^2 + \overline{LC}^2$; ergo (axio: 1) erit
$AL \times LB + \overline{LC}^2 = \overline{Ci}^2$ at (defin: n: 162)
est $\overline{Ci}^2 = \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2$; ideoque (axio: 1)

erit

$AL \times LB \times \overline{LC}^2 = \overline{CB}^2$ vel $= \overline{CA}^2$. Quod erat ostendendum.

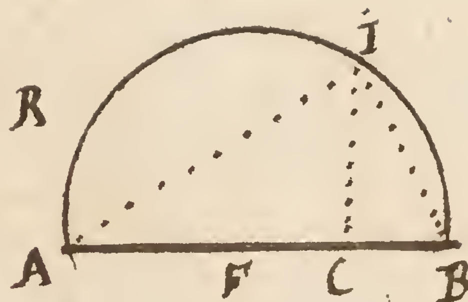
Est prop: 3 libri 2 Euclidis.

Propositio 21ma

Theorema

Si qualibet recta terminata (AB) dividatur utcumque in (C), quadratum totius (AB) aequale erit quadratis partium (AC, CB) una cum duplo rectangulo ab ipsis partibus contento, erit nempe ($\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + AC \times CB + AC \times CB$.)

Recta AB bifariam secetur in F, et describatur semicirculus ARIB, deinde erigatur perpendicularis CI, et ducantur subtensae IA, IB.



Demonstratio.

Angulus AIB in semicirculo inscriptus (prop: 9) est rectus, ideo (cor: 2 prop: 16 libri 3) erit.

$AC + CB = \overline{CI}^2$, sed in triangulis rectangulis AIB, ACI, et BCI, (cor: 1 prop: 19 libri 3) est

$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2$, et

$\overline{AI}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CI}^2$, et

$\overline{BI}^2 = \overline{CI}^2 + \overline{BC}^2$, ideoque (axio: 1) erit

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{BC}^2$, et substituendo pro $\overline{CI}^2$ aequale rectangulo $AC \times CB$, habebimus.

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + AC \times CB \times \overline{BC}^2$. Quod erat demonstrandum.

Est prop: 4 libri 2 Euclidis.

Corrolarium.

Si recta AB bifariam secta fuerit a puncto C, erunt duo quadrata partium aequalium AC, CB erunt aequalia inter se, et duo rectangula ex AC in aequalem rectam CB erunt singula aequalia quadrata unius partis CB, vel CA, proinde quadratum totius AB erit quadruplum quadrati est dimidia AC, vel CB



Propositio 22

Theorema.

Si in aliquo triangulo (ABC) quadratum unius lateris (AC) fuerit aequale quadrati reliquorum laterum AB BC angulus (ABC) a reliquis lateribus contentus erit rectus supra latus AB erigatur perpendicularis BE=BC et ducatur AB.



Demonstratio.

In triangulo rectangulo ABE (cor: prop: 19 libri 3) est $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$ sed (ant: n: 182) est $\overline{BE}^2 = \overline{BC}^2$ ideoque substituendo $\overline{BC}^2$ pro $\overline{BE}^2$ erit $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, sed (hypotesi) est $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ ergo (axio: 1) erit $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2$, et (ant: n: 182) erit AE=AC Itaque duo triangula ABE, ABC, habentia latus AB

commune, et (construct:) latus BE=BC et (demonstr:) latus AE=AC, (prop: 9 libri 2) habebunt angulum ABE=ABC; atqui angulus ABE (construct:) est rectus, ideo (axio: 2) etiam angulus ABC erit rectus, et triangulum ABC erit rectangulum.
Quod erat ostendendum.
Est prop: 48 libri 1 Euclidis

Elementorum Geometricæ Liber 5tus

Definitio 1ma

Figuræ regulares, seu polighona regularia sunt, quæ habent omnes angulos æquales, et omnia latera æqualia; ut quodlibet triangulum æquilaterum vel quodlibet quadratum est figura regularis.

Corrolarium

Ergo omnia polighona regularia habentia eundem numerum laterum (defin: 1 libri 3) erunt similia inter se.

Definitio 2da

Figura rectilinea circulo inscripta dicitur, vel circulus figuræ circumscriptus vocatur quando singulorum figuræ angulorum vertices in peripheria circuli reperiuntur.



Corrolarium

Itaque polighonorum regulare

circulo inscriptum erit, si divisa integra peripheria in partes, seu arcus aequales, ducantur chordae eosdem arcus subtendentes quae (secunda parte prop: 13 libri 4) erunt aequales inter se, et anguli ab eisdem cordis contenti (2 parte prop: 12 libri 4) erunt etiam aequales inter se

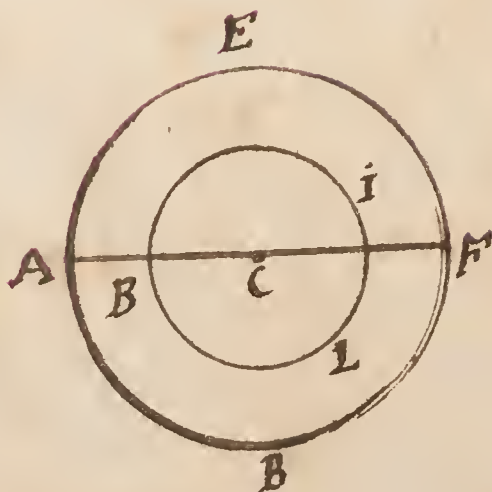
Definitio tertia

Figura rectilinea circulo circumscripta, vel circulus figurae inscriptus vocatur cum singula figurae latera circulum tangunt.

Definitio 4ta

Centrum polighoni regularis idem est ac centrum circuli eidem poli=gono circumscripti, vel inscripti. Perpendicularis vero ex centro ad latus polighoni seu ad circuli chordam ducta, apellatur chathetus, vel radius rectus

Definitio 5ta



Superficies, seu area terminata a duabus circumferentiis (ILB, AMFE) duorum circulorum concentricorum dicitur ad milla, vel zona, vel corona. Excessus vero (AB) radii (CA) majoris circuli supra radium (CB) minoris circuli, apellatur latitudo coronae, seu zonae.

Definitio 6ta

Figurae isoperimetrae dicuntur illae

quae habent perimetros aequales (defin: 13 libri 2) cum nempe summa laterum unius adaequet summam laterum alterius figurae.

Definitio 7ma

Arcus similes circulorum sunt illi, qui habent eandem rationem ad integras peripherias sive in quibus inscribuntur anguli aequales (defin 4 libri 4)

Definitio 8tava

Portiones, vel segmenta circuli similia dicuntur illa, quorum arcus sunt similes, scilicet, quae continent angulos aequales.

Ex hac causa omnes semicirculi sunt similes, quia omnes anguli in semicirculis inscripti (prop: 9 libri 4) sunt recti, proindeque aequales, sive quia eandem rationem habet quilibet semicirculus ad suum integrum circulum quam alius semicirculus ad suum integrum circulum (cor: 1 prop: 15 libri 1)

Propositio 1ma

Theorema

Si ex centro C circulorum concentricorum ABEFG, HILM ducantur quotcumque radii CA, CB, CE, CF, CG secantes utramque peripheriam, et ducantur etiam chordae AB, BE, EF, FG, GA, HI, IL, LM, MS, SH, polighona ABEFG, HILMS in



eisdem circulis inscripta similia erunt

Demonstratio

Duo triangula ACB, HIC circa angulum
Communem in C habent latera propor=
=tionalia

$AC : CB = HC : CI$, quia (defin: 15 libri 2)
sunt $AC = CB$, et $HC = CI$, ideoque
(prop: 9 libri 3) similia erunt ipsa
triangula. Erit igitur angulus $CAB =$
CHI, angulus $CBA = CIH$, et
$AB : HI = BC : CI$ &c.

Similiter in triangulis BCE, ICL demon=
=stratur angulus $CBE = CIL$, angulus
$CEB = CLI$, et
$BE : IL = BC : CI$; consequenter (axio: 2)
erit totus angulus $ABE = HIL$, et (axio: 1)
$AB : HI = BE : IL$.

Eodem ratiocinio demonstratur angulus
$BEF = ILM$, angulus $EFG = LMS$,
$FGA = MSH$ &c. et
$BE : IL = EF : LM = FG : MS = GA : SH$,
proindeque (defin: 1 libri 3) poligona
ILMSH, FGABE erunt similia
Quod erat demonstrandum



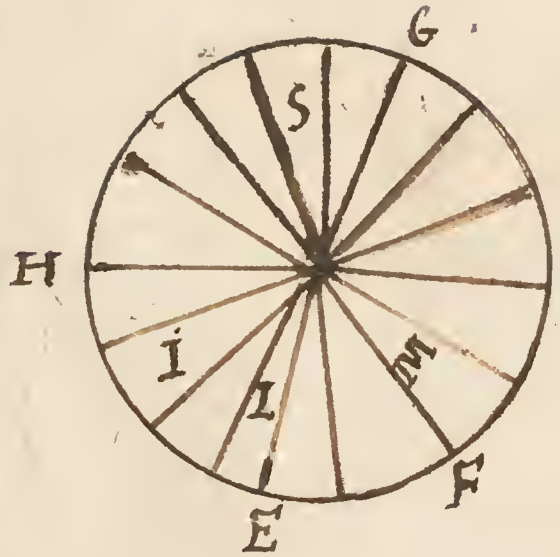
Corrolarium 1mum

Si anguli ad centrum, scilicet ACB, BCE,
ECF, fuerint omnes aequales inter se
tunc arcus oppositi (1 parte prop: 12
libri 4) erunt aequales inter se, et
chordae eosdem arcus subtendentes
(2 parte prop: 13 libri 4) erunt etiam

aequales inter se, ideoque polighona
regularia, et similia

Corrolarium 2dum

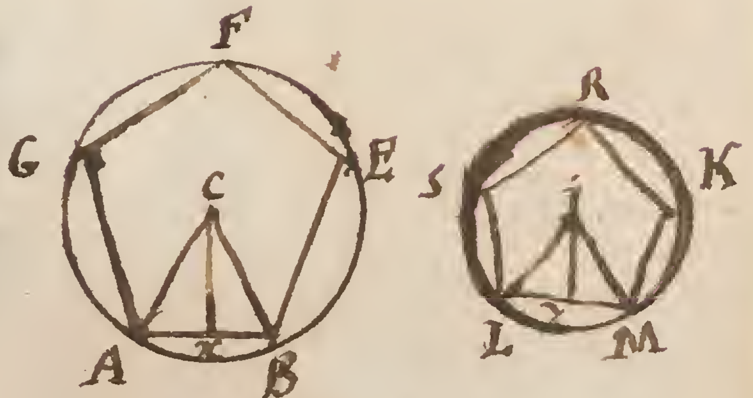
Quapropter anguli ad centra similium
polighonorum regularium erunt
aequales inter se, si autem ex centro
C ad singula puncta periphaeria ABEFG
ducantur radii CA, CB, CE etc. ipsi
continebunt angulos in C aequales inter
se, et indefinite parvos, praeterea
si ductae concipiantur rectae lineae
connectentes extrema eorundem radiorum
ipsae lineae erunt pariter infinite parvae,
et aequales inter se, et cum periphaeria
coincident, atque constituent polighonum
regularem infinitorum laterum. similiter
si recto intelligantur rectae, coniungentes
puncta, in quibus praedicti radii secant
periphaeriam circuli HILMS, etiam
ipsae rectae infinite parvae, et aequales,
et cum periphaeria coincident, et constituent
alterum polighonum regulare infinitorum
laterum atque (demonstr: ante:)
simile alteri polighono. Ergo circuli
sunt polighona regularia similia
infinitorum laterum.



Propositio 2da

Theorema

Similes figurae regulares (ABEFG,
LMKRS) in circuli inscriptae





sunt inter se ut quadrata radiorum (AC, LI), vel chathetorum [(CX, IZ)], sive diametrorum.

Demonstratio

In triangulis isoscelibus ACB, LIM anguli ACB, LIM (cor. 2 prop: ant.) sunt aequales inter se, et (cor. 2 prop: 25 libri 2) bifariam secantur a perpendicularibus CX, IZ; ideoque triangula ACX, ILZ (axio. 9) habent angulum ACX=LIZ, et (axio: 10) angulum AXC=LZI; et (cor. 2 prop: 24 libri 2) reliquum angulum XAC=ZLI; ergo (prop: 7 libri 3) erit

AC:LI=AX:LZ=CX:IZ; sed (cor: 2 prop: 25 libri 2) AX est dimidium rectae AB, et LZ est dimidium rectae LM; proindeque (cor. 1 prop: 15 libri 1) erit

AX:LZ=AB:LM; consequenter (axio: 1) erit

AC:LI=AB:LM=CX:IZ, et (prop: 15 libri 1) habebitur

$\overline{AC}^2:\overline{LI}^2=\overline{AB}^2:\overline{LM}^2=\overline{CX}^2:\overline{IZ}^2$; atqui (prop: 16 libri 3) poligona similia ABEFG, LMKRS, sunt inter se, ut quadrata laterum omologhorum AB, LM, idest sicuti $\overline{AB}^2:\overline{LM}^2$; ergo (axio: 1) erunt etiam inter se ut quadrata chathetorum CX, IZ, vel





radiorum AC, LI. sive ut quadrata
diametrorum, quibus (cor. 1. prop. 15 libri 1)
diametrorum ratio aequalis est rationi
radiorum: ergo similes figurae regulares,
quod erat ostendendum.
Est prop. 1 libri 12 Euclidis.

Corrolarium 1mum.

Quoniam (hypotesi) est $AB:LM=BE:MK=EF:KR$, et (demonstratione) est $AB:LM=AC:LI=CX:IZ$ ideo laterum similium polighonorum regularium in circulis inscriptorum erunt inter se in ratione radiorum sive diametrorum vel chuerthorum.

Corrolarium 2dum.

Praeterea, quia (hypotesi) habemus $AB:LM=BE:MK=EF:KR=FG:RS=GA:SL$, colligendo (prop. 5 libri 1) erunt
$AB:LM=AB+BE+EF+FG+GA:LM+LK+KR+RS+SL$, est autem (demonstr.) $AB:LM=AC:LI=CX:IZ$, ergo perimetri polighonorum similium in circulis inscriptorum erunt inter se in ratione radiorum, sive diametrorum vel chuerthorum.

Corrolarium 3tium.

Quia radii aequales inter se, et omnia latera regularis polighoni in circulo inscripti sunt aequalia inter se, ideo etiam omnes chuerthi eiusdem polighoni aequales erunt inter se.

Corrolarium 4.tum

Similiter circuli erunt inter se in ratione duplicata, sive ut quadrata radiorum, seu diametrorum, quia (cor 3 prop: 1) sunt polighona regu=laria similia infinitorum laterum Est prop: 2 libri 12 Euclidis

Corrolarium 5.tum

Peripheriæ vero circulorum quia (cor: 3 prop: 1) sunt perimetri poli=ghonorum regularium, ideo (cor: 2) erunt etiam inter se, ut diametri vel radii.

Corrolarium 6.tum

Quoniam (demonstr:) circuli inter se et polighona similia in circulis inscripta etiam inter se sunt ut quadrata radiorum, seu diametrorum ideo (axio: 1) circuli erunt inter se sicuti polighona similia in ipsis inscripta

Corrolarium 7.mum

Similes arcus circulorum (defin: 4) sunt inter se, ut integræ peripheriæ et integræ peripheriæ (ante: cor: 5) sunt inter se ut radii, et diametri ergo (axio: 1) similes arcus circulorum erunt inter se in ratione radiorum, seu diametrorum

Corrolarium 8.tavum

Quoniam (ante: cor: 4) circuli

sunt inter se, ut quadrata radiorum ideo radius duplus describit circulum quadruplum, radius triplus describit circulum, qui novies continebit circulum descriptum a radio simplo &c.

Propositio 3tia
Theorema

Circulus (AEFM) est ad zonam (EIZALF) sive inscriptam sicuti quadratum radii (AC) ejusdem circuli ad rectangulum (AB×BF) contentum a latitudine (AB) zona, et a reliqua parte (BF) diametri (AF) ejusdem circuli.

Demonstratio

Diameter AF bifariam divisa est in C, et non bifariam in B, idcirco (propositio 5 libri 2) erit

$\overline{AC}^2 = AB \times BF + \overline{BC}^2$, et auferendo utrinque $\overline{BC}^2$, (axioma 3, et art. n: 10) remanebit

$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BF$, sed (corollarium propositionis ante:) circulus AEFM est ad circulum ILB sicuti $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$ scilicet

$AEFM : ILB = \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$, et convertendo (corollarium propositionis libri 5) erit

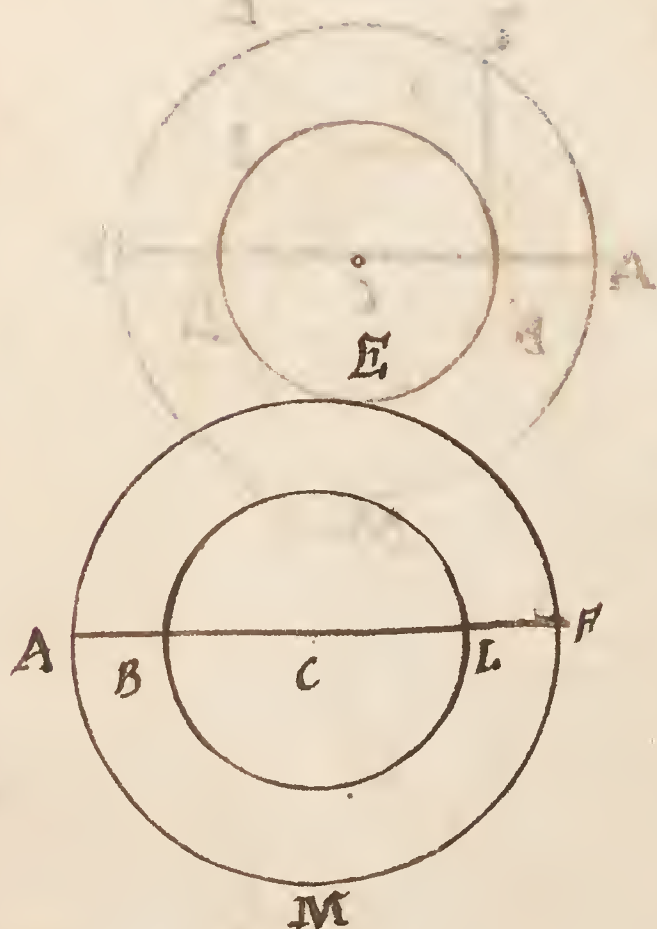
$AEFM : AEFM - ILB = \overline{AC}^2 : \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$
sed ex circulo AEFM, dempto circulo ILB, remanet zona EIALF; nimirum est

$AEFM - ILB = EIALF$, et (demonstr:)

est

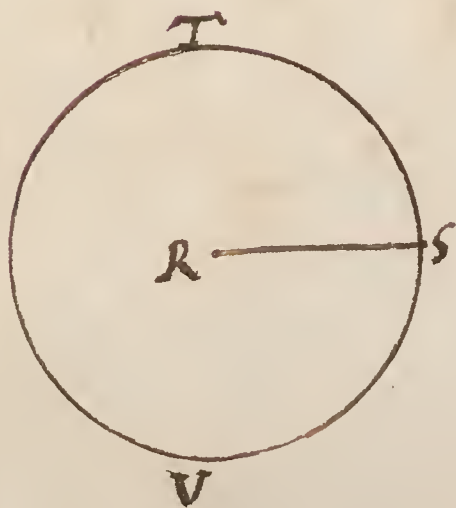
$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BF$; ergo a quolibus aequalia substituendo erit

AEFM : EIALF = $\overline{AC}^2 \times BL$; scilicet circulus AEFM erit ad zonam sibi inscriptam EIALF sicuti quadratum radii AC ad rectangulum $AB \times BF$ contentum a diametri partibus AB, BF. Quod erat ostendendum.



Corrolarium 1mum

Quoniam (cor: 4 prop: 2) alius quilibet circulus STU est ad circulum AEFM sicuti $\overline{RS}^2 : \overline{AC}^2$, et (ante: demon:) est circulus AEFM ad zonam EIALM, sicuti $\overline{AC}^2$ ad rectangulum $AB \times BF$, ideo ordinando (prop: 6 libri 1) erit circulus STU ad zonam EIALF sicuti $\overline{RS}^2$ ad rectangulum $AB \times BF$; nimirum quilibet circulus est ad quamvibet zonam, ut quadratum ex radio ejusdem circuli ad rectangulum comprehensum a latitudine zonae, et a reliqua parte diametri majoris circuli zonam constituentis.



Corrolarium 2dum.

Si ex puncto B ad diametrum AF erigatur perpendicularis BZ; (cor: 1 prop: 18 libri 4) erit $AB \times BF = \overline{BZ}^2$. sed (cor: ante:) est circulus STU ad zonam EIALF, sicuti $\overline{RS}^2$ ad rectangulum $AB \times BF$,

et substituendo $\overline{BZ}^2$ pro aequali rectangulo
ABxBF, erit
$STU : EIALF = \overline{RS}^2 : \overline{BZ}^2$ circulus vero
STU (coroll. prop. 2) est ad circulum
descriptum a radio BZ sicuti $\overline{RS}^2$ ad
$\overline{BZ}^2$ ergo (axio. 1) erit
STU : EIALF = STU ad circulum
descriptum a radio BZ consequenter
(coroll. 2 prop. 3 libri 1) zona EIALF
erit aequalis circulo descripto a recta
BZ quae (prop. 16 libri 4) est media
proportionalis inter segmenta AB, BF
diametri ejusdem zonae.

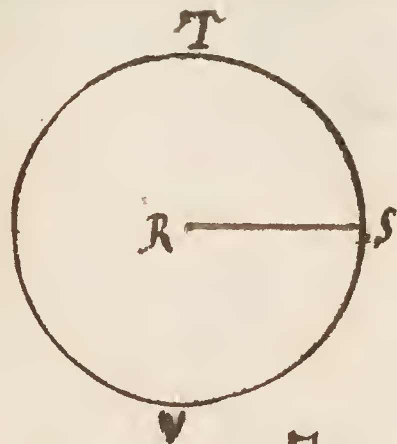
Propositio 4ta

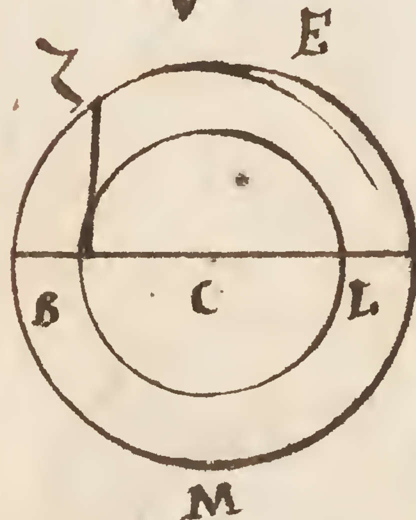
Problema

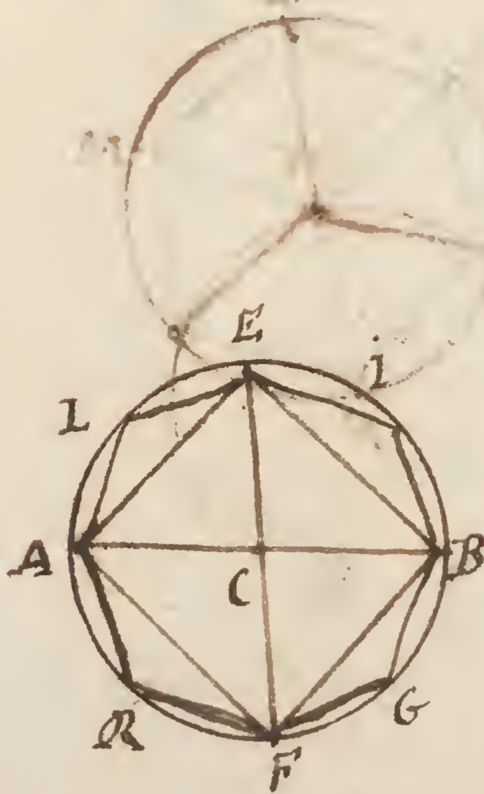
In dato circulo quadratum inscribere.
Diametro AB ducatur alia diameter
perpendicularis EF, et ductis subtensis
AE, EB, BF, FA, erit AFBE quaesitum
quadratum.

Demonstratio

Quatuor anguli ad centrum C
(axio. 10) sunt aequales; ideo (prima
parte prop. 22 libri 3) arcus oppositi
aequales erunt, et (secunda parte
prop. 23 libri 4) chordae AE, EB
BF, FA eosdem arcus subtendentes
erunt etiam aequales inter se;
anguli vero AFB, FBE, BEA, EAF
(prop. ... libri ...) sunt omnes recti,
quia omnes semicirculis inscripti.











ergo figura AEBF aequilatera, et
rectangula erit quadratum. Quod erat
propositum.
Est prop. 6 libri 4 Euclidis.

Scholium

Si arcus ALE, EIB etc. (per prop. 14 l. 6 bis 4)
bifariam dividantur in L, I, G, R et
ducantur subtensae AL, LE, EI, IB etc.
inscriptus erit octogonus regularis
in dato circulo.
Similiter si arcus subtensi a lateribus
octogoni bifariam dividantur, et
ducantur subtensae inscripta erit
in circulo, figura sexdecim laterum
atque ita procedendo describentur
figurae laterum 32, 64 etc.

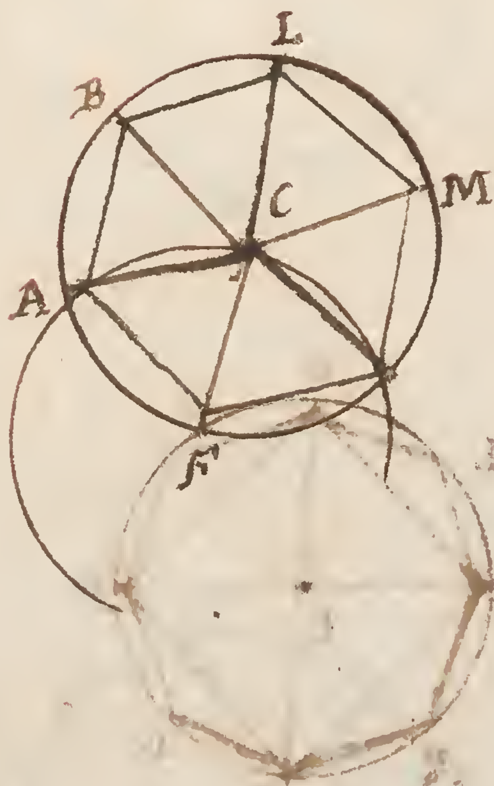
Propositio 15ta

Problema

In dato circulo [illegible] regulare inscribere.
Centro quovis peripheriae puncto,
et radio F C (dati circuli) describatur
alius circulus vel arcus A C E secans
peripheriam dati circuli, in A et E.
Deinde ex punctis A F E ducantur
diametri A M, F L, E B. Postea ducantur
subtensae FA, AB, BL, LM, ME,
EF, et inscriptum erit quaesitum
hexagonum ABLMEF.

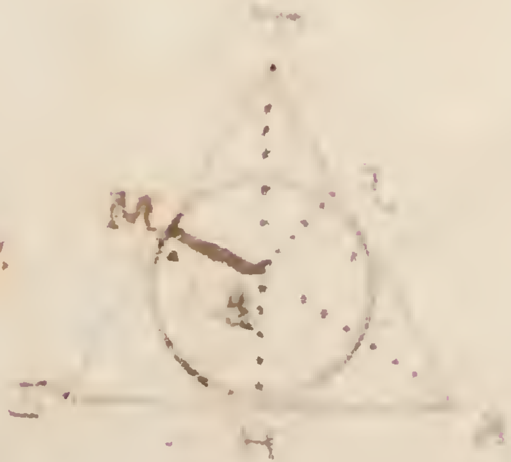
Demonstratio

Triangulum CEF [illegible]



FC, FE, CE, circulorum aequalium
est aequilaterum, ideo (cor. 3 prop. 15 libri 2)
angulus ECF erit tertia pars duorum
rectorum; ergo ejus mensura, scilicet
arcus EF, erit tertia pars semicircum=
=ferentiae EFAB, quae (per defin: 7 libri 4)
est mensura duorum rectorum.
similiter in triangulo aequilatero
AFC angulus ACF est tertia pars
duorum rectorum, et arcus AF
ejus mensura, erit altera tertia pars
semiperipheriae EFAB. consequenter
reliqua pars arcus AB, erit reliqua tertia
pars semicircumferentiae, et angulus
oppositus ACB, erit etiam tertia pars
duorum rectorum itaque (axio: 1)
tres anguli ECF, FCA, ACB erunt
aequales, quibus etiam aequales
sunt anguli ad verticem oppositi
BCL, LCM, MCE (~~defin:~~ prop: 17 libri 2)
cum igitur sex anguli ad centrum C
sint aequales, idcirco (prima parte
prop: 12 libri 4) arcus oppositi aequales
erunt et (secunda parte prop: 13
libri 4) subtensae AB, BL, LM,
ME, EF, FA etiam aequales erunt
inter se. Praeterea omnes anguli
ABL, BLM, LME &c: (secunda
parte prop: 12 libri 4) sunt aequales
inter se, quia insistunt supra arcus
aequales AFEML, MEFAB &c.

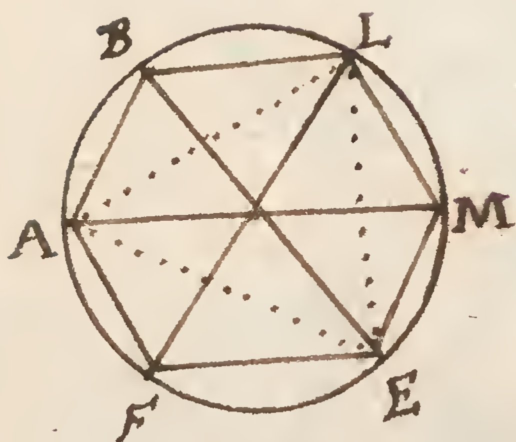




requali; habet enim ex ipsis arcubus continet quinque sextas partes integrae periphe=riae. Quapropter exagonum ABML EF erit aequilaterum et aequiangulum videlicet regulare et in circulo inscriptum. Quod erat faciendum, et demonstrandum est prop. 15. libri 4 Euclidis.

Corrolarium 1mum

Itaque (construct.) latus exagoni in circulo inscripti est aequale radio ejusdem circuli.



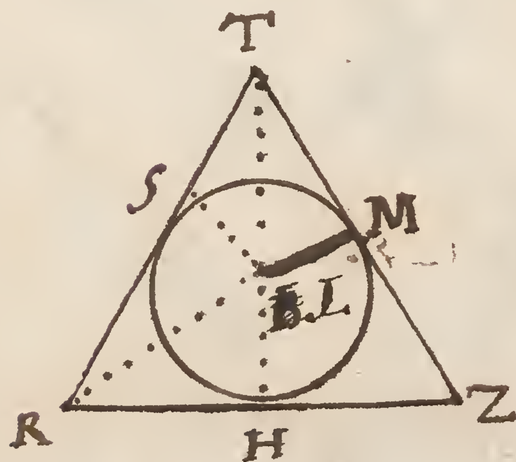
Corrolarium 2dum

Si ducantur subtensae AE, AL, LE triangulum inscriptum EAL erit aequilaterum (2 parte prop. [illegible] 4). Et quod si omnes arcus subtensi laterum exagoni bisecarentur, et ducerentur chordae, inscriptum erit circulo polygonum aequilaterum duodecim laterum [illegible] (ALM) [illegible]

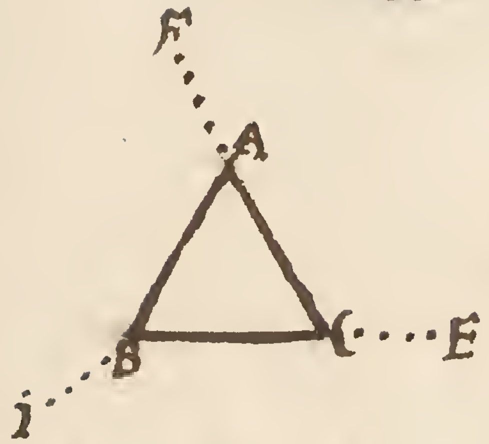
Propositio 2.

Problema

Circa datum circulum polygonum circum=scribere dato polygono aequiangulo simile. [illegible] dati polygoni latera [illegible] ELM omnes [illegible] ACE CBI (corr. prop. [illegible] 2) [illegible] quadrilateri [illegible] in dato circulo ducatur [illegible] habet radium ELM, (ex propositione [illegible])



Fiat angulus HLM aequalis angulo externo ACE, ita constituatur angulus MLS = FAB, et ita progrediendo, si data figura plures haberet angulos erit reliquus angulus CBI aequalis angulo SHL, quia omnes anguli, qui fieri possunt in C simul sumti (cor: 3 prop: 13 libri 2) sunt etiam aequales quatuor rectis, deinde per puncta H, S, M (prop: 6 libri 4) ducantur tangentes RS, TZ RT, quae utrinque productae concurrent, ut in R, T, et Z, atque erit RTZ quaesita figura.

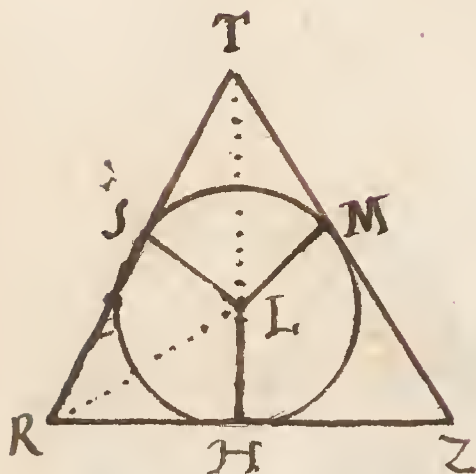




Demonstratio

In figura quadrilatera ZHLM quatuor ejus anguli interni simul sumti (cor: 8 prop: 24 libri 2) adaequant quatuor rectos, duo autem anguli ~~HLM~~ LMZ, LHZ (construc.) sunt ambo recti ideo reliqui duo HLM, HZM simul sumti duobus rectis aequales erunt scilicet (axio: 1) aequales erunt duobus angulis ACE, ACB, qui etiam simul sumti duobus rectis (prop: 13 libri 2) duos rectos adaequant ab aequalibus summis auferantur anguli (construc:) aequales HLM, ACE, et (axio 3) relinquetur angulus HZM, sive TZR, aequalis angulo ACB. Eodem ratiocinio demonstratur angulus T=CAB, et angulus R=ABC, atque





ita de reliquis. si data figura plures habuerit angulos itaque figura RTZ est aequiangula figurae ABC ejus vero latera RZ, RT, TZ (cor: 1 prop: 6 libri 4) circulum tangunt in H, S, et M. ergo (defin: 3) figura RTZ circulo SHM circumscripta est, et aequiangula figurae datae. Quod erat propositum. In hac propositione continetur prop: 3 libri 4 Euclidis

Corrolarium

Si datum poligonum fuerit regulare (defin: 1) tunc etiam omnes anguli TRZ poligoni circulo circumscripti (axio: 1) erunt inter se aequales, et ducantur recti LT LR. quia (cor: 2 prop: 16 libri 4) et tangens TS = TM, et radius SL = LM, et latus LT commune duobus triangulis STL, LTM, ideo (prop: 9 libri 2) erit angulus LTS = LTM, scilicet angulus LTS erit dimidium integri anguli STM. eadem ratione angulus LRS est dimidium anguli HRS. consequenter (axio: 9) erit angulus RTS = LRS erit autem (axio: 16) angulus LST. LSR, ideoque (cor: 1 prop: 24 libri 2) reliquus angulus TLS erit aequalis reliquo LRS; latus vero LS interceptum inter angulos aequales commune est duobus triangulis STL, SRL. ergo (prop: 4 libri 2) erit ST = SR. eadem modo ostenditur

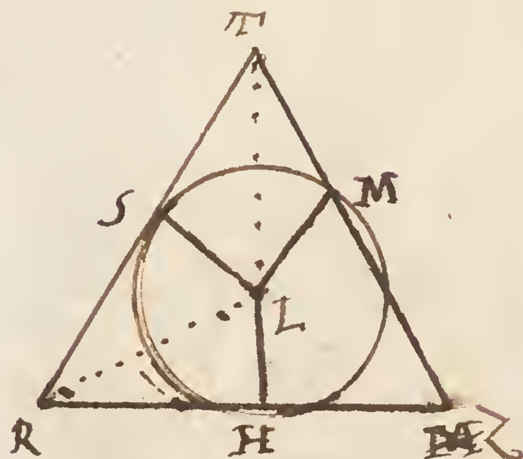
TM=MZ, est autem TS=TM (cor: 2 prop: 16 libri 4); idcirco (axio: 8) erit TR=TZ similiter demonstratur TR=RZ et sic de reliquis, si plura fuerint latera, ergo si datum poligonum fuerit regulare etiam poligonum circulo circumscriptum erit regulare

Propositio 7ma

Problema

In dato triangulo (RTZ) circulum inscribere.

Duo anguli RTZ, TRZ (prop: 11 libri 2) bifariam dividantur per rectas LT LR, quae alicubi (cor: 3 prop: 24 libri 2) se invicem secabunt ut in L, ex quo puncto ad latera trianguli (prop: 14 libri 2) demittantur perpendiculares LS, LM, LH, tandem centro L, intervallo LS, vel LM etc. describatur circulus qui erit quaesitus.



Demonstratio

Etenim (construc:) est angulus STM=MTL, et (axio: 16) angulus TSL=TML, praeterea (cor: 7 prop: 24 libri 2) est angulus SLT=TLM, latus vero LT interpositum inter angulos aequales est commune triangulis LST, LMT, ideoque (prop: 4 libri 2), erit LS=LM, similiter demonstratur LS=LH, ergo tres perpendiculares LS, LM, LH (axio: 1) erunt aequales inter se, et peripheria



336.

circuli descripti ex centro I, et intervallo unius I.H, transibit per puncta H, I, S, et circulus SMH erit dato triangulo RTZ inscriptus, quia latera trianguli (constructi) sunt perpendicularia extremitatibus radiorum, et (Cor. 1 prop. 16 lib. 3) circulum tangunt. Quod erat propositum

Est prop. 4 lib. 4 Euclidis

Scholium

Eodem modo inscribitur circulus in quovis dato poligono regulari.

Corrolarium

Hinc patet catetos regulares figurarum circulo inscriptarum scilicet perpendiculares L H, L S aequales esse radio circuli inscripti.

Corrolarium 2dum

Praeterea evidens perimetrum cujusvis figurae circulo circumscriptae majorem esse perimetro, seu peripheria circuli inscripti. exti causa duae rectae TS, TM simul sumptae sunt majores arcu intercepto SM, et sic de caeteris. unde summa laterum RT, RZ, BZ erit major peripheria circuli SMH

Propositio 8tava

Theorema

Area cujuslibet poligoni regularis est aequalis triangulo, cujus basis adaequat perimetrum, et altitudo sit aequalis chateto ejusdem poligoni.

Demonstratio

M

F
G
E
E
A
R
B
H

Ex centro C dati poligoni ducantur
radii CA CB, CF &c: similiter poligonum
divisum erit in totidem triangula
quot erunt latera poligoni, quæ
triangula erunt omnia æqualia
inter se (prop: 4 libri 2) quia
continentur a radiis æqualibus et
ab æqualibus poligoni regularis
lateribus, proindeque integrum poligonum
ABEFG toties continebit, unumquemque ex
hisce triangulis ACB, quot sunt
latera poligoni, producatur AB
versus H et fiat AH æqualis
perimetro ABEFG nimirum AH,
toties contineat latus unum AB, quot
sunt latera poligoni. Ducatur CH
et ducatur CR. Triangulum ACH
(secunda parte prop: 1 libri 3) est
ad triangulum ACB, sicuti basis AH
ad basim AB, sed (construct:) basis
AH ~~continent~~ totidem vices continet
basim AB, quot sunt poligoni latera;
ergo (defin: 6 libri 1) etiam triangulum
ACH toties continebit triangulum
ACB, quot sunt latera poligoni,
poligonum vero ABEFG (demonstr:)
etiam totidem vices continet triangulum
ACB quot sunt latera poligoni, proindeque
(axio: 6) erit poligonum ABEFG
æquale triangulo ACH, cujus basis
AH, æqualis est perimetro poligoni

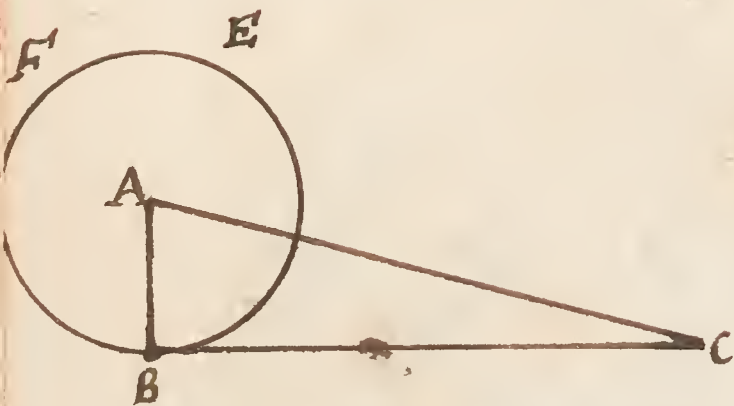


et altitudo AB est chatetus ejusdem poligoni. Quod erat demonstrandum

Corrolarium 1mum

Ergo cujuscus poligoni regularis area obtinebitur, multiplicando dimidiam perimetrum in chateto, per integrum perimetrum in dimidium chateti.

Corrolarium 2dum



Circulus (cor: 3 prop: 1) est poligonum regulare infinitorum laterum, hujus latera infinite parva cum periphæria coincidunt, et catheti, seu perpendicu=
=lares ducta a centro ad ipsa latera infinite parva, sunt ipsimet radii. itaque area cujusvis circuli AEF æqualis est triangulo ABC, cujus basis AC adæquet perimetrum, seu circum=
=ferentiam ejusdem circuli et altitudo sit radius, vel æqualis radio AB, area vero trianguli ABC (cor: 2 prop: 21 libri 2) est æqualis dimidio producto, et altitudinem AB in basim BC basis vero BC adæquat periphæriam EFB, et AB est radius.

Quapropter area circuli æqualis erit dimidio rectangulo ex radio in periphæriam, sive, quod idem est adæquat rectangulum ex radio in medietatem periphæriæ, vel rectangulum ex dimidio radio in integram periphæ=
=riam.

Consequenter rectangulum ex radio in peripheriam erit duplum areæ circuli et rectangulum ex diametro in peripheriam erit quadruplum areæ ejusdem circuli.

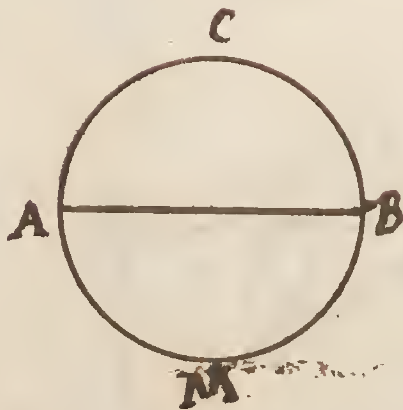
Quoniam regula geometrica inveniendi longitudinem peripheriæ, idest rectam lineam æqualem longitudini peripheriæ, nondum inventa est, ideo data diametro invenitur peripheria per regulas approximationis ab Archimede aut ab aliis clarissimis geometris inventas.

Si enim diameter cujusvis circuli dividatur in septem partes æquales, ut Archimedes demonstravit, ejus peripheria continebit fere viginti duas ex iisdem partibus.



Exactior, et vero proximior est regula tradita a Medio; scilicet divisa diametro in partes 113 longitudo peripheriæ erit partium 355 circiter.

Data igitur circuli diametro AB longitudinis unciarum 35, ad inveniendam peripheriam instituatur sequens regula proportionum 7:22=35 ad quartum terminum, qui (prop. 9 libri 1) erit $\frac{22\times35}{7}$, idest 110, nimirum longitudo peripheriæ ejusdem circuli ACBM erit circiter unciarum 110; Quod si fiat proportio 113:355=35 ad quartum, qui (prop. 9 libri 1) erit $109\frac{108}{113}$ habebitur exactior longitudo peripheriæ unciarum $109\frac{108}{113}$.



Si autem data fuerit peripheria exempli caussa unciarum 66, et quæratur diameter, instituatur

regula proportionis
22:7=88 ad quartum, qui (prop: 9 libri I) erit 28, scilicet longitudo diametri erit unciarum 28, vel fiat
$355:113=88:\frac{113\times 88}{355}$, invenietur proximior diametri longitudo unciarum $28\frac{4}{355}$.

Propositio 9na
Theorema

Circulus, est omnibus figuris regularibus sibi isoperimetris major, sive est omnium figurarum sibi isoperimetrarum capacissima.

Demonstratio.

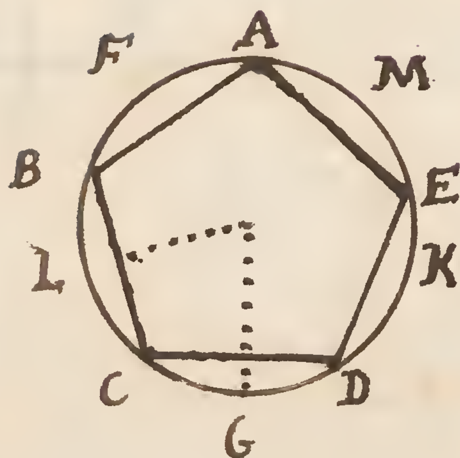
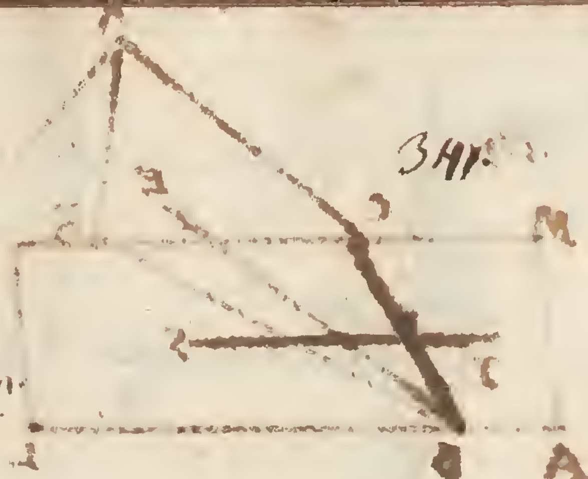


Figura circulo circumscripta non potest esse isoperimetra quia perimetros figurae circumscriptae (cor: 2 prop: 9) major est peripheria circuli; ideoque figura ABCE isoperimetra circulo FLGKM erit minor figura eidem circulo circumscripta, sed figurae circulo circumscriptae cathetus, est ipsemet radius circuli (cor: 1 prop: 7); proindeque chatetus SI figurae circulo isoperimetrae erit minor radio SL. Ac circuli area (cor: 2 prop: ante:) obtinetur multiplicando radium SL in medietatem peripheriae FLGKM, et poligoni regularis area (cor: 1 prop: ante:) invenitur multiplicando chatetum SI in medietatem perimetri ABCDE: est autem (demons:) radius SL semper major chateto SI, dimidia vero peripheria est aequalis medietati perimetri polihoni, quia (hypotesi) sunt figurae isoperimetrae; ergo rectangulum ex dimidia



peripheria in radium majus erit, rectangulo ex dimidia perimetro in chatetum hoc est circulus major erit poligono sibi isoperimetro. Quod erat demonstrandum.

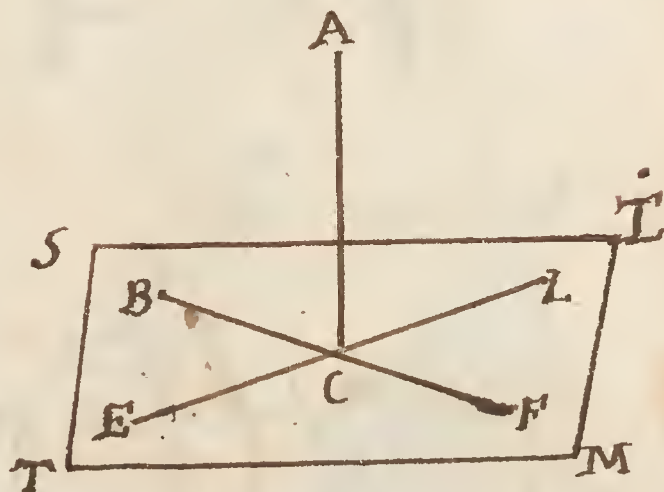


Elementorum Geometriae Liber Sextus

De solidorum doctrina

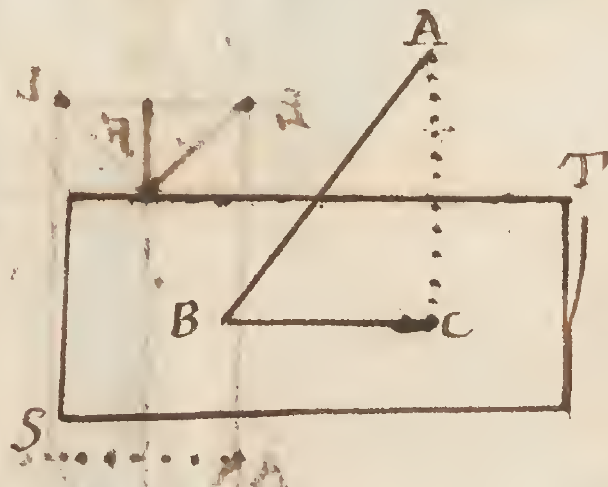
Definitio 1ma

Recta linea (AC) dicitur recta, seu perpendicularis ad planum (STMI) dum rectos et aequales angulos efficit cum singulis rectis lineis CB, CE, CF, in eodem plano ductis, quae illam contingunt in C.



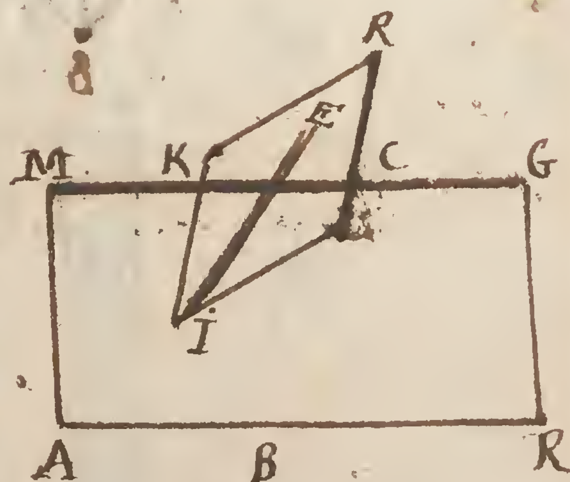
Definitio 2da

Si recta linea AB, oblique incidet supra planum, ST, et ex puncto sublimi A ducta sit perpendicularis AC ad planum ST et a puncto C ad punctum B ducatur in plano recta BC angulus ABC appellabitur inclinatio lineae AB ad planum ST.



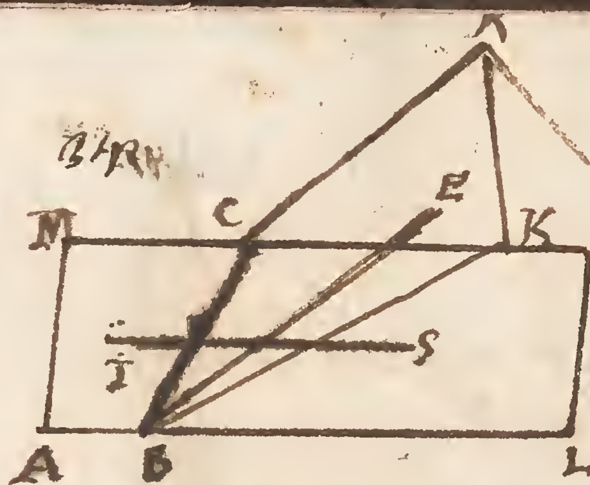
Definitio 3ta

Planum BKRC dicitur perpendiculare, vel rectum AMGL, si quaelibet recta EI in plano BR perpendiculariter ducta supra rectam BC, (quae est communis sectio planorum) fuerit etiam perpendicularis ad planum subjectum AMGL.



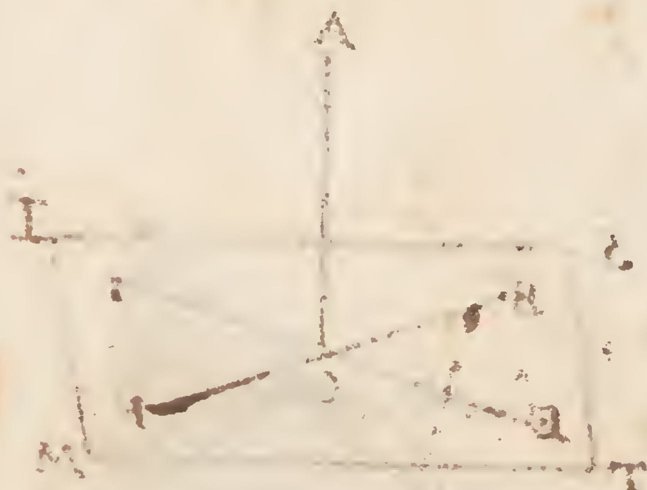
Definitio 4ta

Si in utroque plano AMGL, BCRK ex puncto I ad communem sectionem



BC erigantur perpendiculares FI, et efficiant angulum EIS obliquum tunc planum BKRC erit obliquum seu inclinatum plano AC. Alterius vero plani ad alterum inclinatio est angulus acutus EIS ab ipsis perpendicularibus contentus

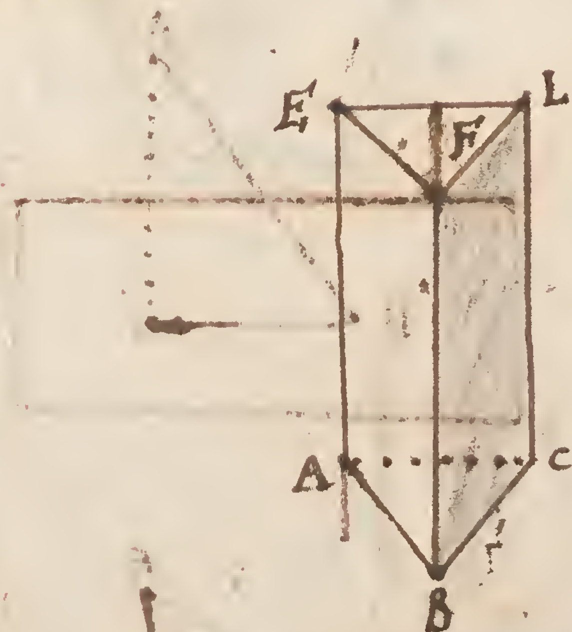
Definitio 5ta



Plana parallela dicuntur, quae in omnem partem producta nunquam inter se convenient, sed aequalibus intervallis ubique inter se distant.

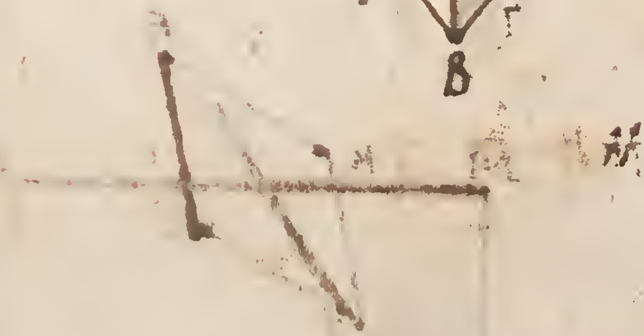
Defin: 6ta

Prisma est figura solida contenta a duobus oppositis planis (ABC)(EFL) seu poligoniis parallelis aequalibus atque similibus, et a totidem parallelogrammis (ABEF, AELC)(BCLF), quot sunt latera oppositorum planorum.



Dicitur prisma triangulare quando opposita plana sunt duo triangula, ut prisma AL.

Appellatur prisma quadrangulare, quando plana opposita sunt figurae quadrilaterae.

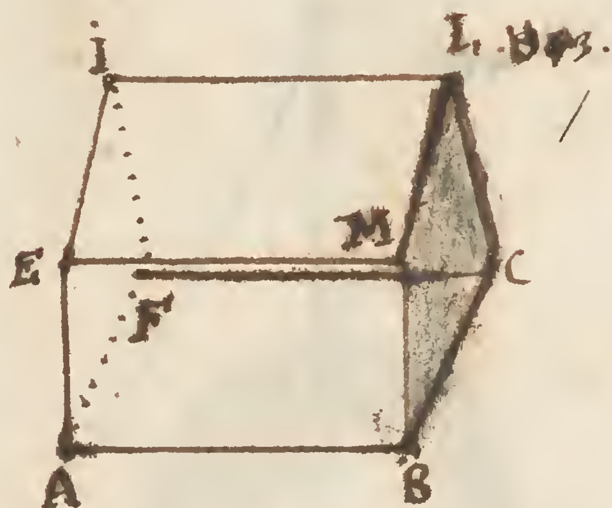


Vocatur prisma pentagonum quando plana opposita sunt duo aequalia pentagona similia et sic de caeteris

Definitio 7ma

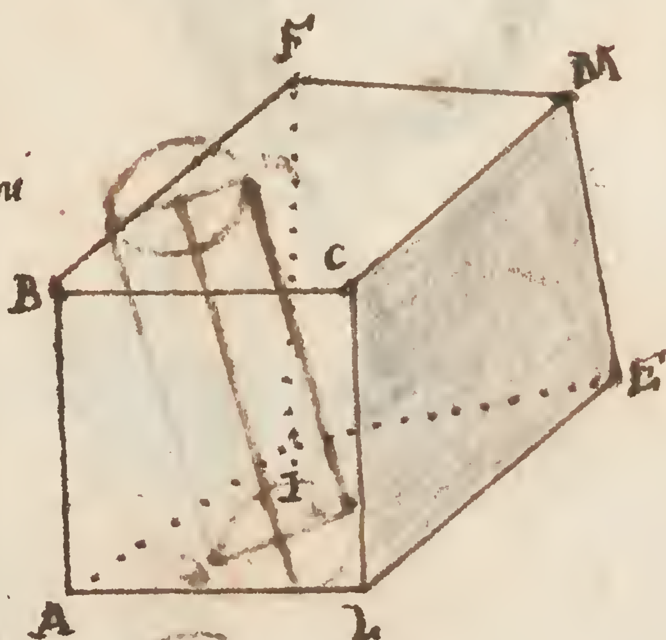
Parallelepipedum est prisma, cujus duo opposita plana sunt duo parallelogramma, unde continetur

a sex parallelogrammis, quorum bina opposita sunt parallela, aequalia, et similia; quale est solidum AL, terminatum a sex parallelogrammis AEMB, AEIF, ABCF, IEML, BMLC, IFCL.



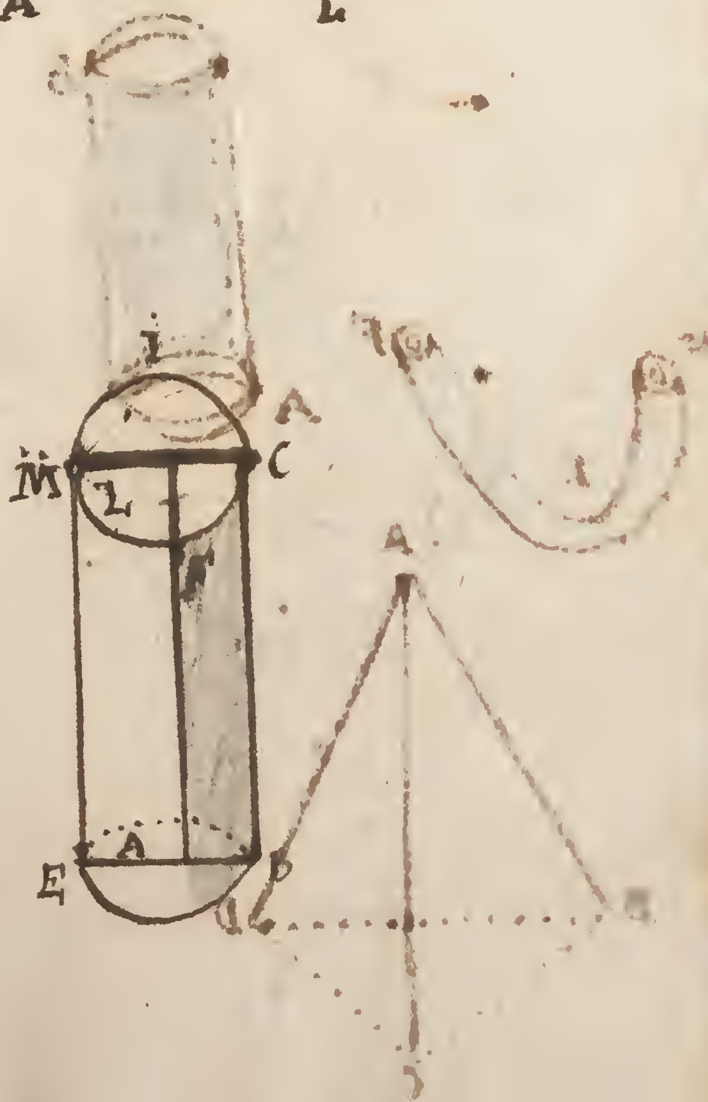
Definitio Octava

Cubus, est parallelepipedum contentum a sex quadratis aequalibus, ut figura solida AM, cujus longitudo BC, est aequalis latitudini CM, aequalis altitudini CL, et continetur a sex quadratis, AC, AF, AE, BM, BL, MI



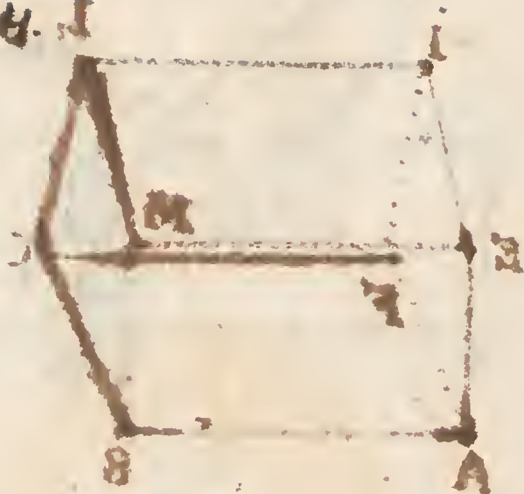
Definitio 9na

Angulus solidus dicitur, qui a pluribus, quam duabus rectis lineis ad idem punctum concurrentibus et non in eodem plano jacentibus constituitur: sive est plurium planorum ad idem punctum concursus, scilicet angulus solidus est, qui a pluribus, quam duobus angulis planis, non in eodem plano existentibus, sed ad idem punctum constitutis efficitur. Sic in cubo AM angulus constitutus in C a tribus angulis planis BCL, BCM, LCM, idest constitutus a tribus rectis CB, CM, CL non existentibus in eodem plano, est angulus solidus.



Definitio 10ma

Si parallelogrammum (ABCL) ita

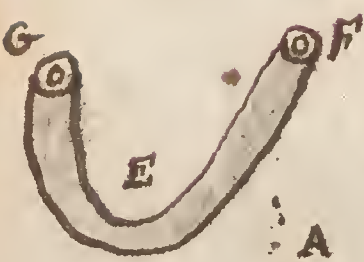


revolvi intelligatur circa latus unum (AI) fixum, et immobile, donec revertatur ad eandem positionem ex qua discesserat, solidum (EC) ab ipso paralellogrammo descriptum apellatur Cilindrus.
Circuli aequales ERBS, IMFK, in revo=lutione paralellogrammi, ab oppositis aequalibus lateribus, AB, IC descripti, dicuntur plana opposita vel bases Cilindri.
Superficies curva descripta a latere CB in revolutione vocatur superficies cilindrica, latus vero fixum AI, jungens centra oppositorum circulorum dicitur axis cilindri, quando axis AI, est perpendicularis ad basim ESBR tunc Cilindrus vocatur rectus, si axis oblique insistit supra basim dicitur cilindrus inclinatus vel obliquus ut FG.



Cum vero Cilindrus sive rectus, sive obliquus, sive etiam incurvatus cavus est, sive perforatus tunc apellatur sipho, vel tubus, ut AB vel CEF.

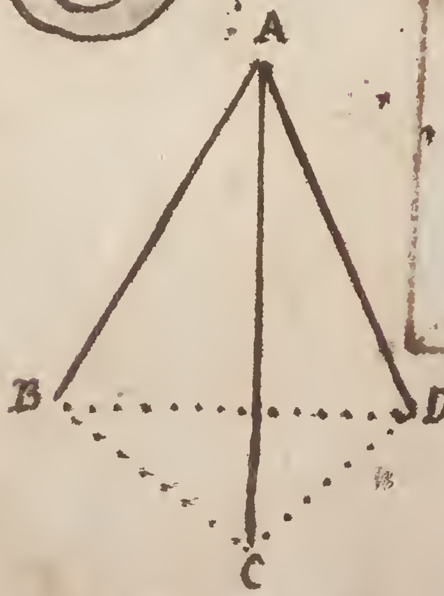




Definitio II^ma^

Pyramis est solidum contentum a basi poligona, et a totidem triangulis ad unicum punctum basi oppositum convenientibus, quot sunt latera ejusdem basis.
Punctum vero illud, in quo triangula

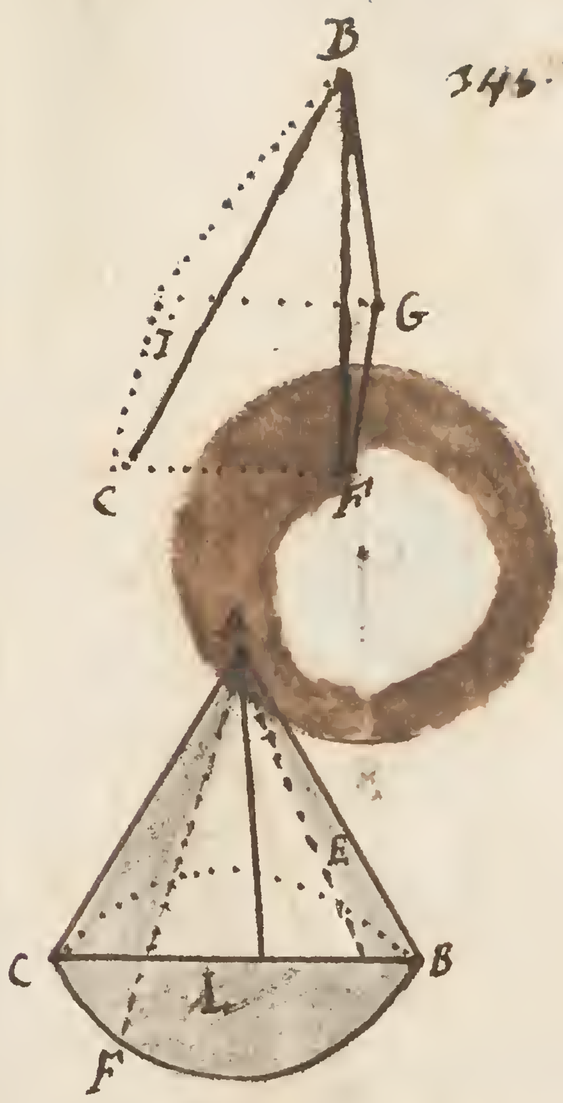




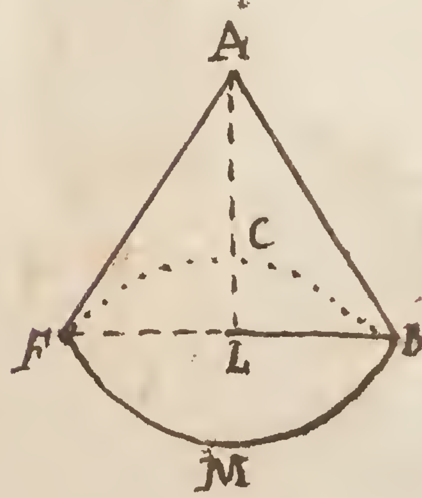
Conveniunt dicitur vertex vel apex pyramidis.
Si basis fuerit triangulum (BCD) pyramis vocetur trilatera, ut pyramis ABCD.
Si basis fuerit quadrilaterum (CFGI) pyramis vocetur quadrilatera, ut BCFGI. Si basis fuerit pentagonum, pentagona dicatur pyramis &c.

Definitio 12ma

Si triangulum rectangulum ALB, cujus angulus rectus est in L, ita revolvatur circa latus AL fixum, et immobile, donec redeat ad positionem ex qua discesserat describet figuram solidam, (AECFB) quae vocatur Conus.



Circulus CFBE a catheto mobili LB descriptus, igitur basis coni.
Superficies curva in revolutione trianguli descripta a latere AB, appellatur superficies conica
Punctum sublime A vocatur vertex, vel apex coni.
Latus immotum AL, scilicet recta ducta ex vertice A coni ad centrum L basis, appellatur axis coni



Quaelibet recta AB, vel AE, vel AF, &c. ducta ex vertice ad quodlibet peripheriae basis punctum, dicitur latus coni.
Praeterea descriptus conus dicitur rectus quia axis AL est perpendicularis ad basim CFBE.
Conus vero obliquus vocatur ille,

cujus axis non est perpendicularis ad
basem, ut conus AFCBM.

Definitio 13^{mae}

Sfera vel globus est solidum corpus unica
superficie curva contentum, cujus omnia
superficiei puncta aequaliter distant a
puncto medio, quod centrum sferae dicitur.



Generari concipitur sfera AEBSC, ex revo-
lutione semicirculi ASB circa diametrum
fixam et immobilem AB, donec revertatur
ad positionem, ex qua discesserat.

Superficies curva in revolutione descripta
a semiperipheria ASB apellatur superficies
spherica.

Centrum C semicirculi ASB dicitur centrum
sphera, a quo omnes recta ad superficiem
sphericam ducta sunt aequales inter se
et dicuntur radii, vel semidiametri
sphera.

Diameter AB circa quam revolvi
intelligitur semicirculus, vel sphera
apellatur axis sphera, et ejus extrema
puncta A et B vocantur poli ejusdem
sphera.

Qualibet alia recta utrinque ad superficie
spherica terminata, et per centrum
sphera transiens dicitur diameter sphera.

Circulus, cujus peripheria est in superficie
spherica, et cujus centrum idem est
ac centrum sphere, apellatur circulus
maximus sphera, ut AEBS, atque

bifariam dividit spheram scilicet in duo
emispheria
Itaque emispherium est solidum terminatum
a circulo maximo sphera, et a dimidia
superficie spherica.

Definitio 14ta

Polyedrum dicitur solidum quodcumque
a pluribus figuris planis rectilineis
terminatum.
Regulare vocatur polyedrum, quando
continetur planis figuris regularibus
aequalibus, et similibus, et omnes ejus
anguli solidi sunt inter se aequales.
Quinque tantum sunt polyedra regularia
scilicet
Primo Tetrahedrum, seu pyramis
regularis, comprehensa a quatuor
triangulis aequilateris, et aequalibus.
Secundo Exahedrum seu cubus contentus
a sex quadratis aequalibus.
Tertio Octahedrum contentum ab octo
triangulis aequilateris, et aequalibus.
Quarto Dodecahedrum terminatum
a duodecim pentagonis regularibus
et aequalibus.
Quinto hycosahedrum contentum
a viginti triangulis aequilateris, et
aequalibus.
Reliqua vero polyedra irregularia
dicuntur.

Definitio 15ta

3418.

Solida similia dicuntur illa, quae a planis similibus, et numero aequalibus continentur.

Definitio 16xta

Prismata similia sunt quorum similes bases sunt inter se ut quadrata altitudinum. Idem intelligatur, de similibus pyramidibus de cilindris similibus, et similibus conis

Definitio 17ma

Quoniam circuli cilindrorum, et conorum bases sunt inter se (cor. 4 prop. 2 libri 3) ut quadrata radiorum, vel diametrorum ideo cilindri similes, et similes coni sunt, quorum quadrata radiorum, seu diametrorum basium, sunt inter se, ut quadrata altitudinum.

Cum vero radices quadratorum propor=tionalium (prop. 13 libri 1) sint etiam proportionales, idcirco cilindri vel coni erunt similes, si radii, vel diametri basium fuerint inter se in ratione altitudinum.

Praeterea, ut cilindri, vel coni sint similes necesse est, ut ipsorum axes eandem habeant inclinationem ad bases.

Definitio 18tava

Altitudo cujusvis prismatis, vel cilindri est recta linea a plano superiore ad planum basis perpendiculariter ducta. Itaque in cilindro recto axis est altitudo ejusdem cilindri.

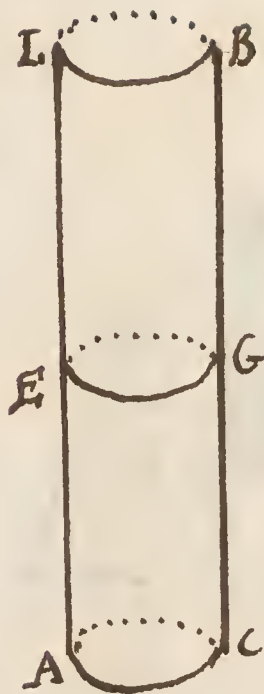
Altitudo vero cujuslibet pyramidis aut

coni est perpendicularis in vertice eo recta ducta. Consequenter in cono recto, axis est altitudo ejusdem coni.

Definitio 19na

Sectio cujuslibet corporis, sive solidi est figura plana, quae describitur in solido dum solidum ipsum, a transverso plano secatur.

Ut si cilindrus AB, secetur a plano EG, paralello basi AC, circulus EG qui in ea sectione describitur in cilindro vocatur sectio cilindri. Praterea opposita plana, seu bases cilindri, vel prismatis etiam dicuntur sectiones oppositae cilindri, vel prismatis.



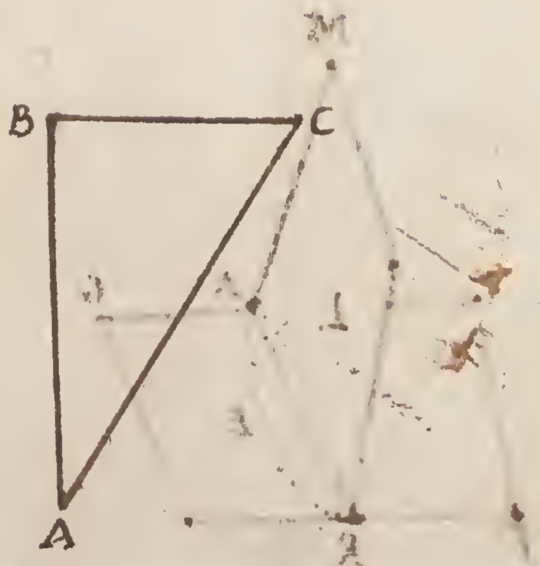
Definitio 20ma

Cilindrus sphera circumscriptus dicitur ille, cujus axis idem est cum sphera axe, et cujus diameter basis adaequat diametrum, seu axem sphera. Cilindrus vero emispherio circumscriptus ille est, qui basim communem habet cum emispherio, et cujus altitudo, adaequat radium spherae, seu altitudinem emispherii.

Propositio 1ma

Theorema

Primo omnis recta linea in eodem plano posita est, scilicet fieri nequit ut ejusdem rectae lineae pars una jaceat in uno plano, et pars altera



sit in alio plano elevato, ut evidens est ex definitionibus plani et lineæ rectæ (defin: 5, et 6 libri 2)

Secundo omne triangulum totum jacet in eodem plano. Triangulum enim (defin: 18 libri 2) est figura plana ideoque repugnat (defin: 6 libri 2) unam ejusdem trianguli partem in uno plano jacere, et alteram in alio plano positam esse.

Tertio si duæ rectæ se mutuo secent in eodem plano jacebunt sive per duas rectas se mutuo secantes AB, AC, semper extendi potest aliquod planum. Nam si earundem linearum duo quælibet puncta B, et C jungantur recta BC habebitur triangulum ABC quod totum (secunda parte) in eodem plano ABC reperietur, ergo etiam ejus latera, AB, AC, in eodem plano jacebunt.

Quarto similiter quælibet alia figura plana semper tota in eodem plano jacet. Quod erat ostendendum. Sunt prop: 1, et 2 libri 11 Euclidis.

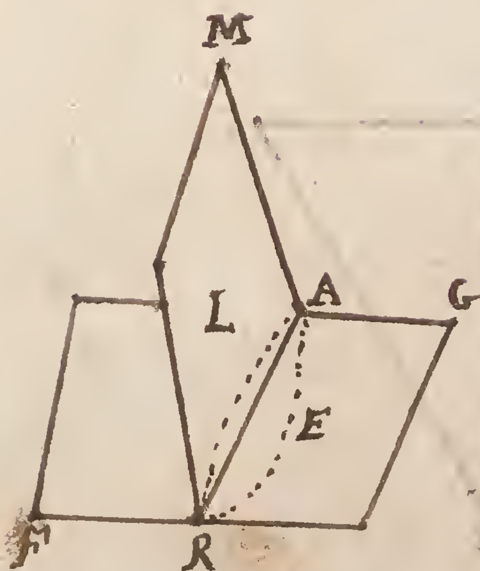
Propositio 2da

Theorema:

Communis sectio (BA) duorum planorum (FG, BM) est linea recta.

Demonstratio.

Etenim si communis sectio BA

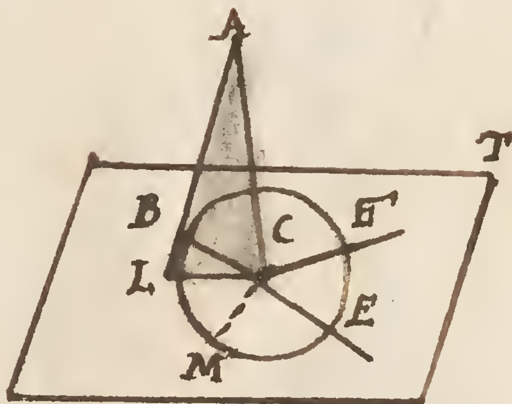


non esset linea recta, tunc, quia puncta B et A, sunt utrique plano communia in plano BIM (postul. 1) duci posset recta AIB, et in alio plano FG, duceretur alia recta AEB, quod repugnat (defini: 5 libri 2, et con:) ergo communis sectio AB, est linea recta. Quod erat demonstrandum Est prop: 3 libri 11 Euclidis.

Propositio 3tia

Theorema

Si recta linea (AC) perpendicularis fuerit ad duas rectas (BE, LF) se mutuo secantes (in C); ipsa rectam (AC) erit etiam perpendicularis ad planum (ST) in quo ipsa recta jacent.



Demonstratio

Nam ducta ad punctum sublime A recta LA si concipiatur triangulum rectangulum ACL revolvi circa chatetum fixum AC donec redeat ad positionem ex qua moveri caeperit, alter chatetus CL describet planum circulum LMEFB ad quem perpendicularis erit recta CA, quia in omni positione linea AC semper est perpendicularis recta CL scilicet omnibus radiis circuli. sed in eodem plano a recta CL descripto etiam reperiuntur recta BE, LF quia (hypotesi) recta AC est ad eas perpendicularis, rectae vero BE, LF (hypotesi) sunt in plano ST, ergo

recta AC (demonstr.) perpendicularis ad planum circuli, etiam perpendicularis erit ad planum ST, in quo reperitur circulus: Quod erat demonstrandum.
Est prop: 4 libri 11 Euclidis.

Corrolarium 1mum

Hinc si recta AC perpendicularis fuerit tribus rectis, BE, LF, CM, se mutuo se=cantibus in C, illae tres rectae in eodem plano positae erunt.
Est prop: 5 libri 11 Euclidis.



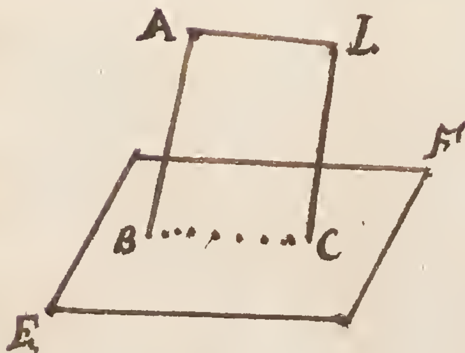
Corrolarium 2dum

Praeterea evidens est, unicam perpen=dicularem CA ad planum ST, ex puncto C eligi posse.

Propositio 4ta

Theorema

Lineae rectae (AB, CL) ad idem planum (EF) perpendiculares; erunt inter se parallelae.



Demonstratio

Ducatur in plano recta BC, ad quam (defin: 1) perpendiculares erunt ambae rectae AB, CL; atque concipiatur recta AB, perpendiculariter ad planum E moveri, et fluere supra rectam BC donec perveniat ad punctum C ubi coincidet cum recta CL: aliter enim, alterutra ipsarum non esset perpendicularis ad planum (cor: 2 prop: antece:); atque motu suo describet

planum ABCL, in quo (construc:) jacent rectæ AB, CL, quas secat recta BC, et efficit angulos internos ABC, LCB, rectos; ergo (prop: 18 libri 2) rectæ AB, CL erunt parallelæ. Quod erat ostendendum.
Est prop: 6. libri 11 Euclidis.



Corolarium 1mum

Ergo rectæ parallelæ AB, CL, et recta BC, in eas incidens, in eodem plano jacebunt. Est prop: 7 libri 11 Euclidis.

Corrolarium 2dum

Quod si duæ rectæ AB, CL fuerint parallelæ, et ipsarum una AB fuerit perpendicularis ad planum EF, etiam altera CL erit perpendicularis ad idem planum, quia (Cor: 2 prop: ante:) ex eodem puncto C unica eligi potest perpendicularis ad planum EF quæ (ante: demonstr:) parallela erit perpen=dicularis AB: cum autem (hypotesi) CL sit parallela rectæ AB erit etiam perpendicularis ad planum E; aliter enim ex eodem puncto C, eidem rectæ AB, duæ parallelæ ducerentur, quod repugnat (defin: 11: ~~Euclidis~~ libri 2).
Est prop: 8 libri 11 Euclidis.

Propositio 5ta

Theorema

Si eidem rectæ lineæ, (EM) parallelæ fuerint aliæ duæ rectæ (AB, CL)



sed non in eodem plano cum illa existentes, ipsae quoque inter se para=
=llelae erunt.

℣ In plano AM, in quo sunt duae parallelae AB, EM, ducatur EA perpendicularis rectae EM. Similiter in plano CM in quo jacent duae parallelae EM, CL ducatur recta EC, perpendicularis ad eandem rectam EM, et ducatur AC.

Demonstratio

Recta EM (construc:) est perpendicularis duabus rectis AE, EC, se mutuo secantibus in E. idcirco (prop: 5) erit perpendicularis plano AE, in quo jacent ipsae rectae. Consequenter tam recta AB, quam recta CL, quae (hypotesi) sunt parallelae eidem rectae EM (cor: 2. prop: ante:) erunt etiam perpendiculares eidem planum AEC, atque (prop: antece:) erunt parallelae inter se.

Est prop: 9. libri 11. Euclidis.

Corrolarium

Itaque plano rum ABME, EMCL quae per lineas parallelas AB, LC extenduntur, communis sectio EM, parallela erit utrique parallelarum AB, CL.

Propositio 6[ta]

Theorema

Si duae rectae (AB, BE) se mutuo secantes in plano (EF) parallelae

fuerint rectis (CL, CG) se invicem secantibus in alio plano (GFI) duo plana EF, GH, erunt inter se parallela.

Demonstratio.

Rectæ AB, CL (hypotesi) parallelæ, in eodem plano ABCL (cor: 1 prop: 4) reperiuntur, similiter recta parallella BE, CG jacent in eodem plano EBCG, proindeque plana EF, GH, neque producta, juxta directiones linearum AB, CL, neque secundum directiones linearum EB, GC convenire possunt, quia si concurrerent, etiam lineæ parallelæ AB, CL, vel BE, CG convenirent quod (defin: 11. libri 2) repugnat. ergo necesse est, ut plana EF, GH (defin: 5) sint parallela.

Est prop: 15. libri 11. Euclidis.

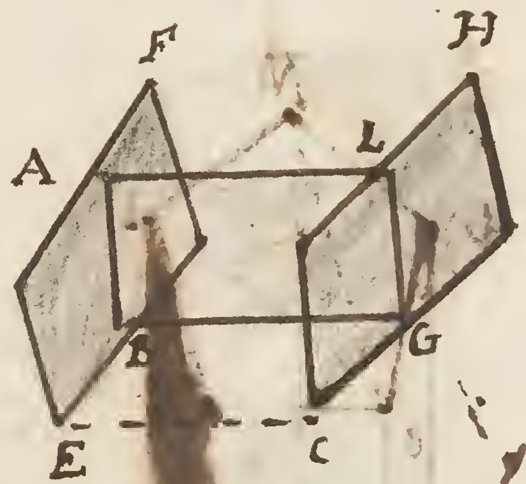
Propositio 7ma

Theorema

Plana (EF, GH) ad quæ eadem recta (BC) est perpendicularis sunt inter se parallela.

Demonstratio

Ducta intelligatur recta EG parallela rectæ EC, recta EG (cor: 2. prop: 4) erit eidem perpendicularis ad plana EF, GH. Jungantur recta BE, GC, quia anguli interni EBC, GCB sunt recti; Recta EBC (prop: 19 libri 2) erit parallela rectæ GC. similiter







ducta AI, paralella recta BC, et ductis etiam rectis BA, CL, demonstrantur recta AB paralella recta CL, idcirco (prop: ante:) erit planum EF paralellum plano GH. Quod erat demonstrandum. Est prop: 14 libri 11 Euclidis.

Propositio 15 [illegible]
Theorema

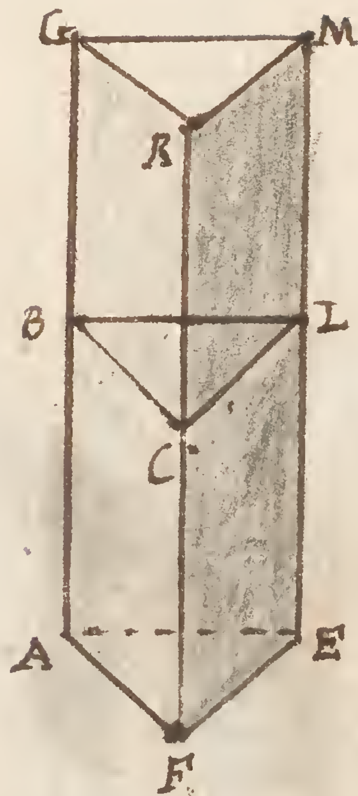
Quodlibet prisma poligonum dividitur in totidem prismata triangulara aeque alta, quot sunt latera basis, demptis duobus. Sit prisma pentagonum AM et ab aequalibus angulis GBC, SAF oppositarum basium aequalium (defin: 6) atque similium. Ducantur ad oppositos angulos recta linea BM, BL, AI, AE, bases opposita, seu singula pentagona GBCLM, AFEIS divisa erunt in tria triangula, quorum duo GBM, AIS sunt aequalia et similia quia (defin: 6) habent latera GB = AS, GM = IS, et angulum BCM = ASI, ideo (prop: 6 libri 2) erit CM = AI angulus GMB = AIS sunt haec ab aequalibus angulis CML, EIS auferendo aequales angulos, CMB, AIS, (axio: 3) relinquentur angulus BML = AIE, sed (demons:) est BM = AI, et (hypoteni) ML = IE; idcirco (prop: 6 libri 2 et defin: 1 hujus libri) triangulum BML erit aequale, et simile triangulo IEA. Similiter aequalia, et similia erunt

triangula BCL, AEF. Praeterea, quia duae recta AB, IM sunt (hypotesi) parallella et aequales eidem recta SG, ideo (prop: 8 et axio: 1) etiam inter se parallella et aequales erunt: conse=quenter (prop: 29. libri 2) aequales recta BM, AI erunt parallella. similiter aequales recta BL, AE erunt parallella. Itaque plana ABMI, AELB sunt parallellogramma, atque secant integrum prisma AM in tres partes ABLEFC, ABMIEL, ABMIESG, quae (defin: 6) sunt tria prismata triangularia continentur enim (demonstr:) a 6 oppositis planis parallelis aequalibus et similibus, et a totidem parallellogrammis quot sunt latera basis.

Eodem modo demonstratur prisma exagonum dividi in quatuor prismata triangularia, prisma eptagonum in quinque prisma triangulare, in sex prismata triangularia et ita deinceps. Quod erat ostendendum.

Corrolarium

Itaque si duo plana parallella secentur ab alio plano, planorum sectiones erunt parallela, sunt sectiones BM, AI facta a plano AIMB secante duo plana opposita et parallela ES, LMG, ISALG sunt (demonstrato) parallella. Et prop. 16 libri 11 Euclidis.



Propositio 9.na

Theorema

Si prisma triangulare (AM) secetur a plano transverso (BCL) basi (AEF, vel GRM) parallelo, sectio (BCL) erit similis, et aequalis basi.

Demonstratio

Plana parallela BCL, AEF secantur a plano AR, ideo (per: prop: anteced:) sectiones BC, AF erunt parallelae, eadem ratione CL, est parallela rectae FE, et BL parallela rectae AE (sed (ex hypothesi) AB est parallela rectae FC, et FC parallela rectae EL, et EL parallela rectae AB, ideoque (prop: 26. libri 2.) erit BC = AF, CL = FE, et BL = AE, proindeque (prop: 9. libri 2.) erit angulus BCL = AFE, angulus ACE = EAF, et BLC = AEF. Consequenter sectiones AEF, BCL erunt aequales, et similes. Secundo si quodcunque prisma polighonum secetur a plano basi parallelo; sectio erit pariter aequalis, et similis basi.

Nam prisma polighonum (prop: anteced:) dividitur in prismata triangularia, et opposita sectiones, seu bases in totidem triangula dividuntur, quorum bina opposita aequalia sunt, et similia, et similiter posita: unde integra sectio similis, et aequalis erit basi.

Corollarium.

Quoniam circuli (cor: 3 prop: 1 libri 5) sunt poligona similia infinitorum laterum, et f. ases cilindri (defin: 10) sunt circuli aequales, ideo cilindrus considerari potest tamquam prisma poligonum infinitorum laterum, proindeque sectio cilindri parallela basi erit pariter circulus aequalis et similis basi.

Propositio 10ma

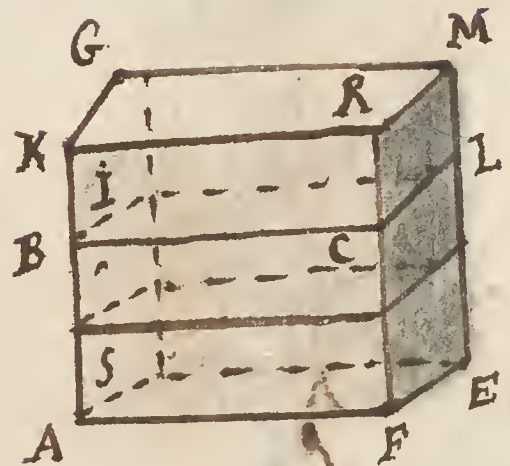
Theorema

Omne prisma componi intelligitur ex totidem planis basi aequalibus, et parallelis quot sunt elementa seu puncta in altitudine ejusdem prismatis.

Atque productum ex altitudine in basim erit soliditas ejusdem prismatis.

Demonstratio

Dato quovis prismate AM, si mente concipiamus planum seu basim ASEF motu sibi constanter parallelo elevari usque ad altitudinem seu ultimam positionem GKRM, et in omnis altitudinis AH puncto, sive in omni positione BCEI semper sui vestigium relinquere evidens est planum AC describere solidum prisma AM, quod de alio quolibet prismate intelligatur. Praeterea quia (demonstr.) prisma componitur ex totidem planis basi aequalibus, et similibus quot sunt elementa, seu puncta in altitudine AH, ideo soliditas



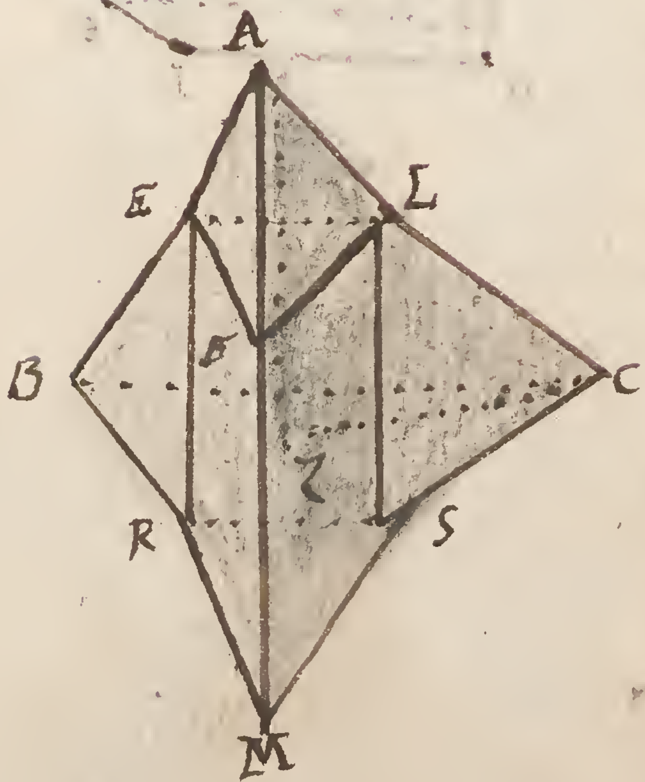
Cujusvis prismatis erit aequalis producto
ex altitudine AK, seu FR in basim ASEF
Quod erat ostendendum.

Corrolarium

Cilindrus (cor: prop: 9.) est prisma poligonum
infinitorum laterum: ideo etiam de
Cilindro verificantur ea, quae de prismate
demonstravimus. Itaque si (cor: 2 et Scholio
prop: 8 libri 5) inveniatur area circuli
basis Cilindri, et multiplicetur per altitudinem
ejusdem Cilindri, habebitur Cilindri soliditas.

Propositio 11ma

Theorema

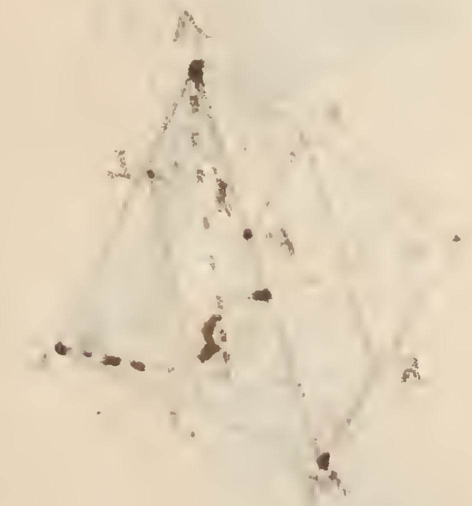


Si qualibet pyramis triangularis ABCM
secetur a plano transverso EFL basi
BCM parallelo, sectio EFL erit similis basi.
Basis vero BCM ad quamlibet sectionem
EFL sibi parallelam, erit ut quadratum
altitudinis AI absissae pyramidis AEFL.
Secentur BR=FE et CS=FL, et ducantur
rectae ER, SL, RS.

Demonstratio

Planum ABC, secans plana parallela
BCM, EFL efficit sectiones BC, EF (cor: prop: 8)
inter se parallelas, et (constru.) sunt
aequales, idcirco (prop: 29 libri 2) rectae
ER, CF erunt parallelae, et aequales, similiter
aequales rectae FL, ES demonstrantur
parallelae, unde etiam recta IC, LS erunt
parallelae, et aequales, proindeque
(prop: 5, et axio 1.) etiam parallelae,

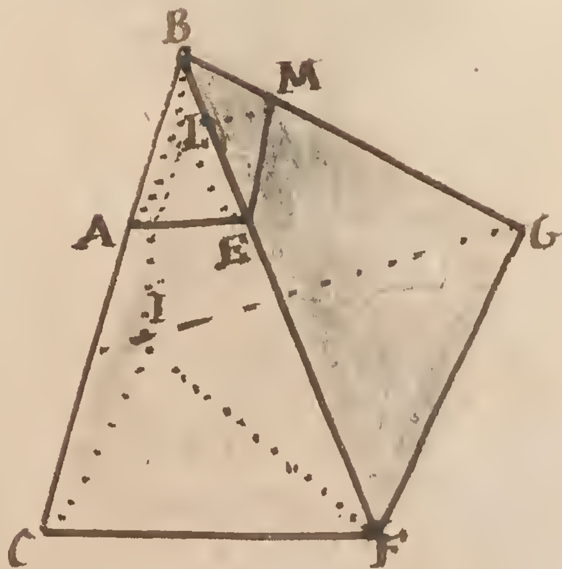
et aequales erunt inter se recta ER, SL: ideoque (prop: 29. libri 2.) recta EL parallela, et aequalis erit recta LS; ergo (prop: 9. libri 2.) erit angulus RCS=EFL, angulus CRS=FEL adeoque et triangulum EFL (prop: 7. libri 3.) simile, et aequale erit triangulo RCS, sed (cor: prop: 8.) est BM parallela recta EL, et ipsi EL demonstravimus parallelam esse rectam RS, igitur (prop: 5.) erit RS parallela lateri BM. Itaque (cor: prop: 7. libri 3.) triangulum RCS erit simile triangulo BCM, consequenter (cor. defin: 1. libri 3) etiam triangulum EFL erit simile triangulo BCM.



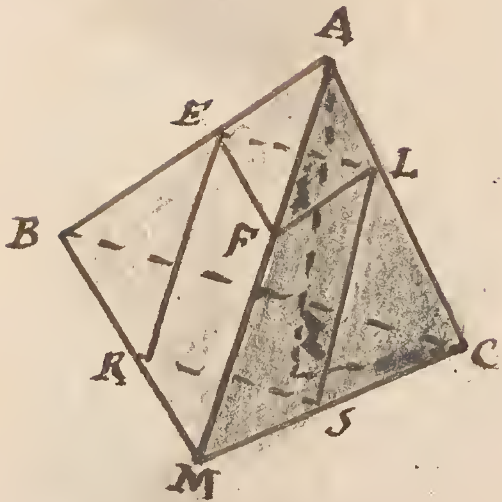
Triangulum vero BCM est ad simile triangulum EFL (prop: 14. libri 3.) sicuti $\overline{CM}^2 : \overline{FL}^2$, et in triangulis similibus ACM, AFL (cor: prop: 7. libri 3.) est $\overline{CM}^2 : \overline{FL}^2 = \overline{AM}^2 : \overline{AL}^2$ et in similibus triangulis AZM, AIL est $\overline{AM} : AL = \overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2$ ergo (axio: 1.) erit basis BCM ad parallelam sectionem EFL, sicuti $\overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2$ Quod erat demonstrandum.

Corrolarium primum

Idem verificatur de pyramidibus polygonis, quia dividuntur in totidem pyramides aeque altas, quot sunt latera basis, demtis duobus: sic pyramis quadrilatera BCFGI dividitur in duas



pyramides triangulares BCFGI, BIFG aeque alta atque qualibet sectio AEML parallela basi similis demonstratur eidem basi CFGI duo enim triangula IFG FGI (demonstrantur) sunt similia triangulis AEL ELM, et similiter posita, unde integra basis ICFG erit similis integrae sectioni AELM.



Corrolarium secundum

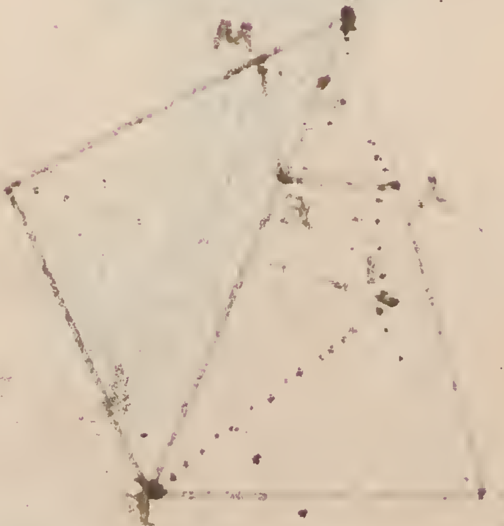
Itaque in omni pyramide sectiones basi parallelae a basi usque ad verticem procedendo continuo decrescunt in ratione quadratorum quarum altitudinum seu distantiarum. Si exempli causa tota altitudo AR fuerit triplum altitudinis AI sectio GFL erit nona pars basis BCM, nam (demonstr.) erit

$BCM : EFL = \overline{AR}^2 : \overline{AI}^2 = 9:1$, et invertendo erit:

$EFL : BCM = \overline{AI}^2 : \overline{AR}^2 = 1:9$.

Corrolarium 3tium.

Praeterea, quia circulus coni basis (cor: 3 props. libri 5) est poligonum regulare infinitorum laterum, ideo conus est pyramis poligona infinitorum laterum atque coni sectiones basi parallelae similes erunt eidem basi hoc est erunt etiam circuli, qui a basi usque ad verticem progrediendo continuo decrescunt in ratione quadratorum suarum distantiarum a vertice.



Propositio 12ma

Theorema.

Pyramides aeque altae sive inter plana parallela constitutae sunt inter se in ratione basium

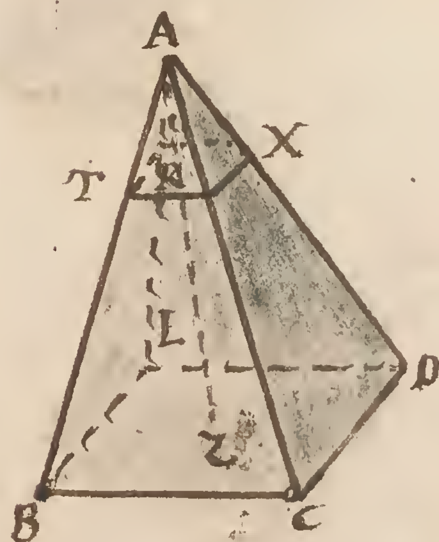
Pyramides EFHM, ABCDL habeant aequales altitudines EI=AZ erit pyramis EFHM ad pyramidem ABCDL, sicut basis FHM ad basim BCDL.

Demonstratio

Etenim utraque pyramis componi intelligitur ex totidem planis basi simi=libus et parallelis, decrescentibus in ratione quadratorum distantiarum a vertice (cor: 2 prop: ant.) quot sunt elementa seu puncta in altitudine EI, seu AZ. Itaque ex altitudinibus aequalibus EI, AZ sumantur qualibet partes aequales ES, AR, atque per puncta S, et R exten=dantur plana GKO TUXY basibus FHM BCDL parallela sectiones GKO, TUXY (prop. ante.) respondentibus basibus similes erunt atque erit FHM: GKO = $\overline{EI}^2$: $\overline{ES}^2$ sive = $\overline{AZ}^2$: AR (quia est EI=AZ et ES=AR) similiter (cor. 2 prop. ante.) erit

BCDL : TUXY = $\overline{AZ}^2$: $\overline{AR}^2$; ideoque (axio: 1) erit FHL : GKO = BCDL : TUXY, et alternando (prop. 3 libri 1) erit basis FHL ad basim BCDL, sicuti sectio GKO ad sectionem aeque altam TUXY quod semper verificatur de omnibus sectionibus aeque altis: proindeque colligendo (prop: 8 libri 1) erit basis FHM ad





basim BCDL, sicut summa omnium sectionum pyramidem EFHIL constituentium ad summam eadem sectionum efficientium pyramidem ABCDL, nimirum ex pyramis ad aeque altam pyramidem, sicut basis ad basim. Quod erat demonstrandum.
Sunt prop: 5, et 6 libri 12 Euclidis.

Corrolarium 1mum.

Itaque si pyramides aeque altae habuerint easdem, seu aequales bases, erunt pariter aequales inter se.

Corrolarium 2dum

Coni aeque alti sunt etiam inter se sunt bases, id est ut circuli basis conorum, quia coni (cor: 3 prop: 11) sunt pyramides poligonae infinitorum laterum.
Est prop: 11 libri 12 Euclidis.
Praeterea si circuli bases conorum fuerint aequales, etiam coni aeque alti erunt aequales inter se.

Corrolarium 3tium

Quoniam circuli conorum bases (cor: 4 prop. 2 libri 5) sunt inter se, ut quadrata radiorum, seu diametrorum, ideo coni aeque alti, qui (demon.) sunt inter se in ratione basium erunt etiam inter se ut quadrata radiorum, seu diametrorum basium.

Propositio 13tia

Theorema

Prisma est triplum pyramidis habentis

eandem, vel aequalem basi, et eandem, vel aequalem altitudinem.

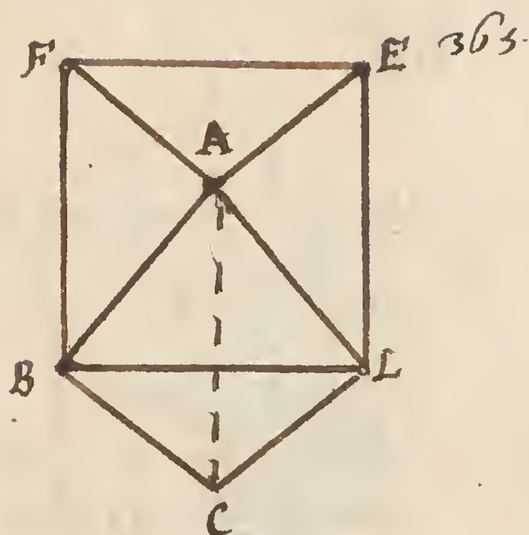
Demonstratio

Primo sit prisma triangulare BCL EAF, in quo ducantur parallelogrammorum diametri BE, AB, AL.

Duae Pyramides ABLC BFEA supra bases (defin: 6) aequales BLC, EAF et eandem altitudinem habentes, sive inter plana paralella BCL, AEF constituta (cor: 1 prop: antec:) erunt aequales inter se. Quarerea si pro vertice pyramidis BAEF sumatur A, ejus basis erit EFB et eadem pyramis ABFE (cor: 1 prop: ante:) erit aequalis pyramidi ABLE, cujus vertex est A et basis (EBL) quia habent bases EBF, EBL (prop: 26 libri 2) aequales et habent eandem altitudinem, quae est perpendicularis ducta ex vertice communi A ad planum EFBL in quo reperiuntur bases, itaque (axio: 1) tres pyramides ABCL, BFEA, AELB erunt inter se aequales, et simul sumta (axio: 10) adaequant integrum prisma BCLEFA ergo idem prisma erit triplum pyramidis sibi inscripta ABCL, sive habentis eandem basin BCL, et eandem altitudinem prismatis.

Est prop: 7 libri 12 Euclidis.

Secundo si prisma fuerit poligoneum





tur (prop: 8) dividi poterit in prismata triangularia, quae singula erunt tripla singularum pyramidum triangularium sibi inscriptarum. Quapropter omnia prismata triangularia simul sumpta tripla erunt omnia pyramidum triangularia simul sumpta, idest prisma poligonum triplum est sibi inscriptae pyramidis poligonae. Quod erat demonstrandum.

Corrolarium primum

Similiter cilindrus est triplus coni sibi inscripti qui nempe eandem cum cilindro basim et eandem altitudinem habeat, quia cilindrus est prisma infinitorum laterum, et conus est pyramis etiam infinitorum laterum

Est prop: 10 libri 12 Euclidis.

Corrolarium 2dum

Quoniam (prop: 10, et cor:) prismatis vel cilindri soliditas obtinetur multiplicando basim in altitudinem; ideo pyramidis, vel coni soliditas aequalis erit producto ex basi in tertiam altitudinis partem, quia (demonstr:) pyramis vel conus est tertia pars prismatis vel cilindri habentis eandem basim, et eandem altitudinem.

Propositio 14ta

Theorema

Si quodlibet prisma (AM) secetur a plano KLZ basi parallello; segmenta (AK) (LM) divisi prismatis erunt inter se in

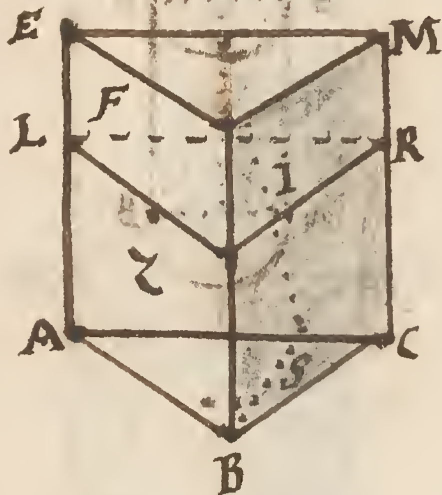
ratione altitudinum (SI) IF, vel laterum
(BZ)(ZF):

Demonstratio

Nam segmenti, seu prismatis AK soliditas (prop: 10.) est aequalis producto ex altitudine SI in basim ABC, et prismatis FM soliditas adaequat productum ex altitudine IF in basim KLZ. Itaque est prisma AK ad prisma LM $= ABC \times IS : KLZ \times IL$ et dividendo per bases (prop: 9.) aequales ABC, KLZ (prop: 10 libri 1.) est prisma AK ad prisma LM sicut $IS : IF$.

Praeterea quia plana parallella ABC, KLZ secantur a plano BFS, ideo (cor: prop: 8.) est sectio BS parallella sectioni ZI, consequenter (prop: 2 libri 3.) erit:

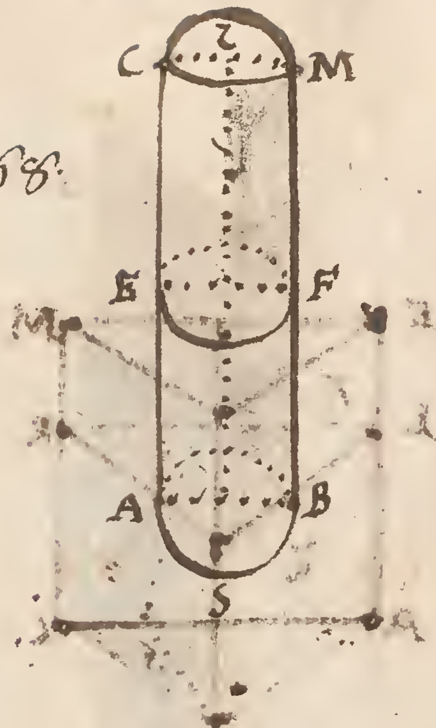
$BZ : ZF = SI : IF$. sed (demonstr:) est prisma AK ad prisma LM, sicuti SI ad IF. idcirco (axio: 1) est prisma $AK : LM = BZ : ZF$, vel $= AL : LE$ siquidem quia est $BZ = AL$, et $ZF = LE$. Itaque si quodlibet prisma etc. Quod erat ostendendum.



Corrolarium 1mum

Ex demonstratis est prisma AK ad prisma LM sicuti altitudo vel latus AL ad latus LE, et componendo (prop: 14 libri 1.) erit $AK+LM : LM = AL+LE : LE$, hoc est integrum prisma AM ad segmentum LM, sicuti latus AE ad partem LE vel sicuti altitudo LS ad ejus partem IF. Similiter demonstratur $AL : AK = AE : AL$ sive $= FS : SI$.

368



Corrolarium 2dum

Idem verificatur de cilindris, quia sunt prismata infinitorum laterum.

Insuper in quolibet cilindro AM secto a plano EF parallelo basi AB erit portio seu cilindrus AF ad segmentum seu cilindrum EL, ut axis SI ad axem IZ, quia (prop: 28 libri 2) et planus AE = SI, et EC = IZ.

Est prop: 13 libri 12 Euclidis

Propositio 15ta

Theorema

Prismata aeque alta sunt inter se in ratione basium.

Demonstratio

Nam prismata (prop: 13) sunt tripla pyramidum sibi inscriptarum, pyramides vero aeque altae (prop: 12) sunt inter se ut bases: ergo bases (prop: 10 libri 1) etiam prismata pyramidum tripla erunt inter se in ratione basium.

Est prop: 32 libri 11 Euclidis

Corrolarium 1mum

Hinc si prismata aeque alta habuerint eandem vel aequales bases, erunt pariter aequalia inter se.

Sunt prop: 30 et 31 libri 11 Euclidis.

Corolarium 2dum

Haec omnia etiam de cilindris verificantur quia sunt prismata infinitorum laterum.

Propositio 16ta

Theorema

Prismata (AD, GL) habentia aequales bases (ABC, GHI) sunt inter se in ratione altitudinum (AE, GZ).

Demonstratio

Etenim ex majore altitudine AE secetur pars AT aequalis minori GZ, et per punctum T extendatur planum TRM parallellum basi ABC, erit prisma AM (cor: 1 prop: ante:) aequale prismati GL. Sed prisma A est ad prisma AM sicut AE ad AT (cor: 1 prop: 14) ideoque substituendo prisma GL pro aequali prismate AL, et GZ pro aequali AT erit prisma AT ad prisma GL sicut AE ad GZ. Quod erat demonstrandum

Corolarium 1mum

Hinc pyramides, quia sunt subtriplae prismatum sibi circumscriptorum, si habuerint eandem, vel aequales bases, erunt etiam inter se in ratione altitudinum (cor: 1 prop: 15 libri 1)

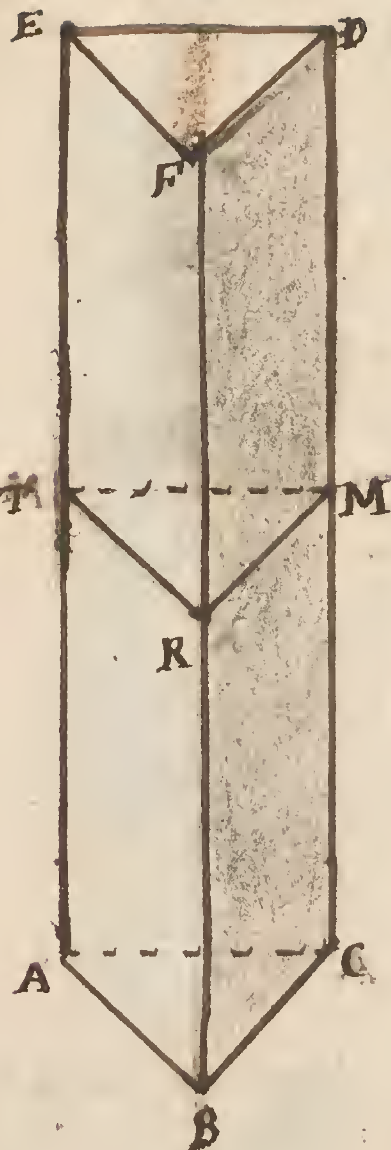
Corrolarium 2dum

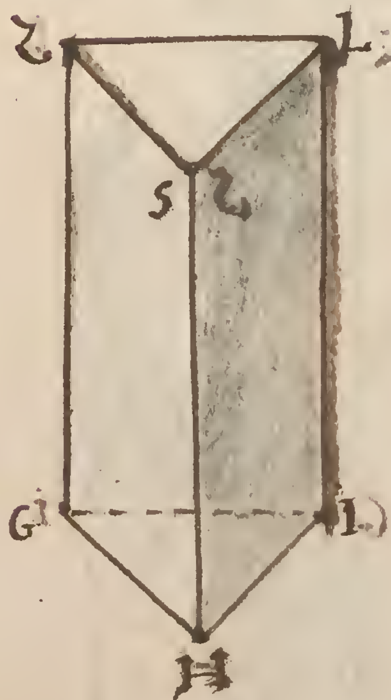
Idem intelligatur de cilindris et de conis quia cilindri sunt prismata, et coni sunt pyramides infinitorum laterum. Vti prop: 14 libri 12 Euclidis.

Propositio 17ma

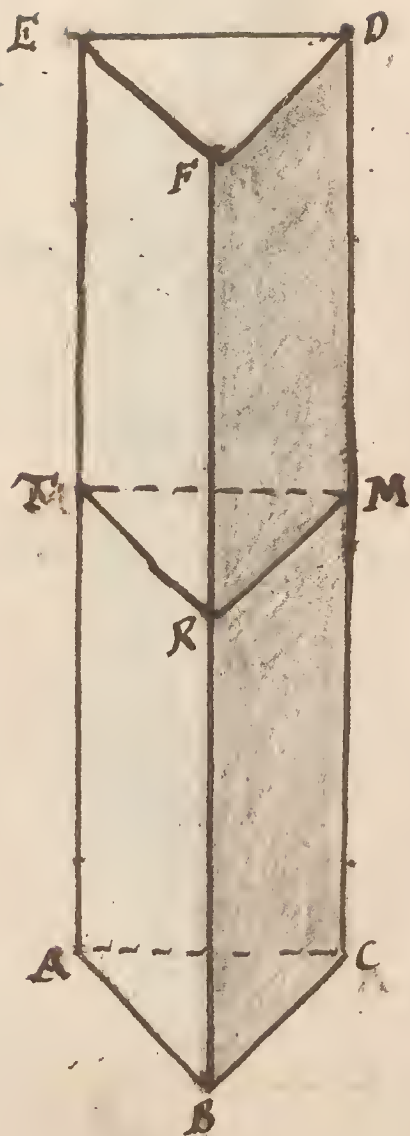
Theorema

Prismata quaecumque (AD, GL) sunt inter se ~~sunt~~ in ratione composita ex rationibus basium (ABC, GHI) et altitudinum (AE, GZ)





370



Ex prismate AT abscindatur ut in antecedenti propositione prisma AM aeque altum cum prismate GL

Demonstratio

Trium prismatum AD, AM, GL, primum AD (Cor: 1 prop: 14) est ad secundum AM sicuti AE ad AT, sive substituendo GZ pro aequali AT, est

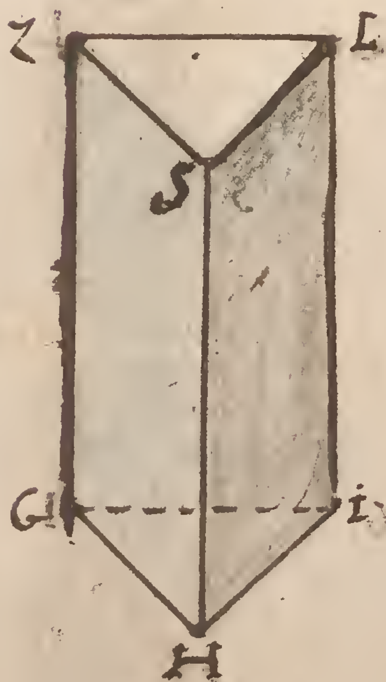
AT:AM=AE:GZ; secundum vero AM (prop: 15) est ad tertium GL sicuti basis ABC ad basim GHI, ergo (prop: 16 libri [illegible]) erit primum AD ad tertium GL in ratione composita ex rationibus AE:GZ primi ad secundum, et ADC:GHI secundi ad tertium, nimirum (Cor: 3 defin: 6 libri 1) erit prisma AT ad prisma GL sicuti ADC×AE ad GHI×GZ

Quod erat demonstrandum.

Corrolarium 1mum

Si prismata AD, GL fuerint similia, hoc est terminata a planis similibus similiterque positis, et numero aequalibus: si nempe fuerint AE:GZ=AC:GI=AB:GH=BC:HI etc, et anguli respondentes fuerint aequales, EAB=ZGH, EAC=ZGI CAB=IGH, tunc (prop: 11 et 16 libri 5) erit basis ABC ad basim GHI, sicuti $\overline{AB}^2$ ad $\overline{GH}^2$, vel sicuti $\overline{AE}^2$ ad $\overline{GZ}^2$, sed (demonstr. anteced.) est AD ad GL=ABC×AE:GHI×GZ; unde substituendo rationem $\overline{AE}^2:\overline{GZ}^2$ pro aequali ratione ABC:GHI, erit

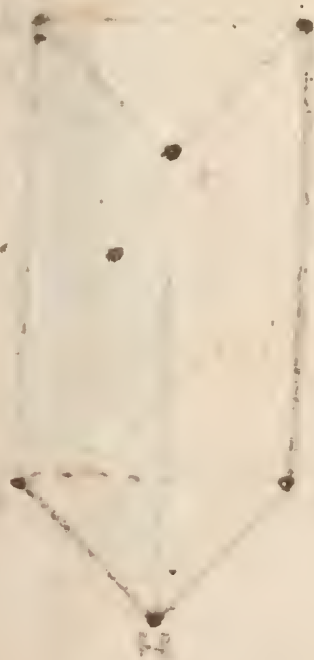
$AD:GL=\overline{AE}^2\times AE:\overline{GZ}^2\times GZ$, scilicet $AD:GL=\overline{AE}^3:\overline{GZ}^3$. Atqui (hypoth.) est



AE : GZ = AC : GI = AB : GH &c., ideoque (prop: 13 libri 1) erit etiam
$\overline{AE}^3 : \overline{GZ}^3 = \overline{AC}^3 : \overline{GI}^3 = \overline{AB}^3 : \overline{GH}^3$, ergo (axio: 1) erit
$AD : GL = \overline{AC}^3 : \overline{GI}^3 = \overline{AB}^3 : \overline{GH}^3$, nimirum prismata similia erunt inter se ut cubi laterum omologorum, vel altitudinum.

Itaque si latera unius prismatis fuerint quadrupla laterum alterius similisque prismatis, tunc primum erit sexaginta quatuor vices majus secundo prismate.

In hoc Corrolario continetur propositio 33 libri 11 Euclidis.

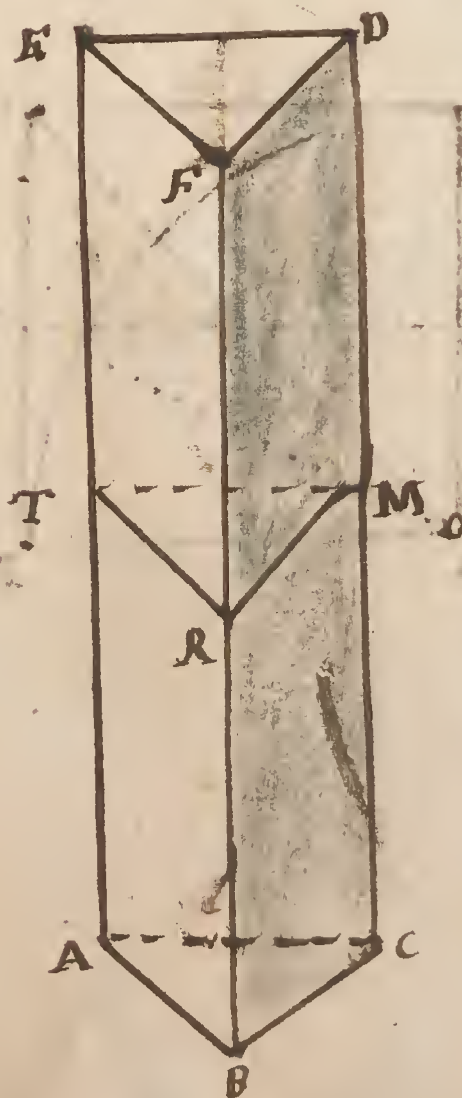


Corrolarium 2dum

Et omnia verificantur de similibus pyramidibus, quia (prop: 13) sunt subtriplae [illegible] prismatum sibi circumscriptorum

Corrolarium 3tium

Idem verificatur de cilindris similibus, et similibus conis, quia cilindri sunt prismata, et coni sunt pyramides infinitorum laterum; ideoque cilindri, vel coni erunt inter se, ut cubi altitudinum, vel sicuti cubi diametrorum, seu radiorum basium, quia (defin: 17) habent diametros seu radios in ratione altitudinum.



Propositio 18ctava

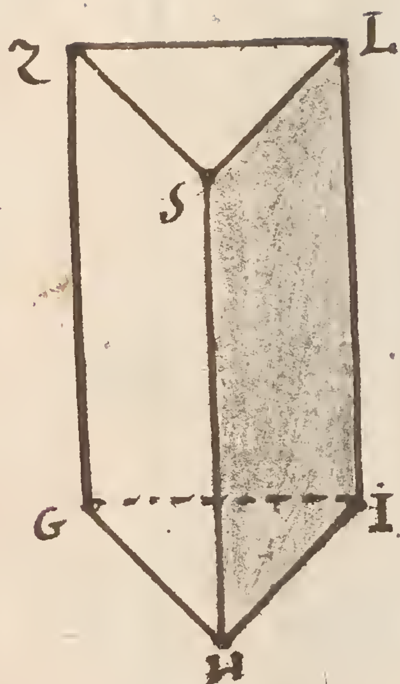
Theorema.

Prismata quae habent bases in reciproca ratione altitudinum sunt aequalia. Et converso prismata aequalia habent bases

in reciproca ratione altitudinum.

Demonstratio.

Nam si est ABC : GHI = GZ : AE (prop: 1 libri)
erit
ABC×AE = GHI×GZ, sed est prisma AB
aequale prismati GL, vicissim si fuerint
ABC×AE = GHI×GZ, dissolvendo (cor: 1 prop: 2
libri 1) erit
ABC : GHI = GZ : AE, idest prismata aequalia
habent bases in reciproca ratione altitudinum
Quod erat ostendendum.



Corolarium.

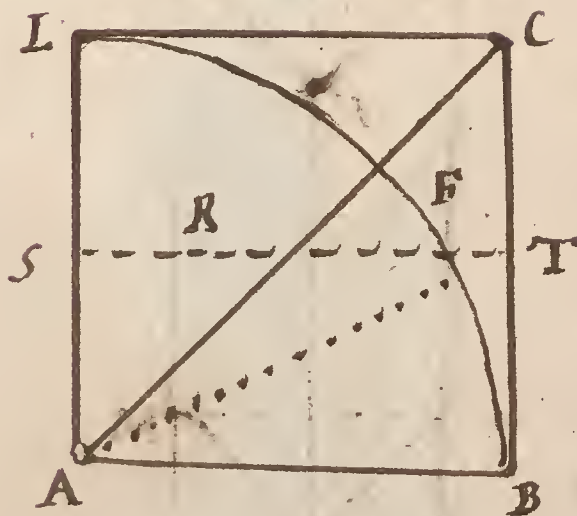
Eadem omnia verificantur de pyramidibus,
de cilindris, et de conis, ut ex antecedentibus
demonstrationibus patet.

Propositio 41na

Theorema

Sphera duas tertias partes circumscripti
cilindri adaequat.

Sit quadratum ABCL, in quo ducatur
diameter AC, et centro A radio AL, vel AB
describatur arcus LFB, quia (defin: 7 libri 4)
erit quarta peripheriae pars, et triangulum
mixtilineum ALB (defin: 6 libri 4) erit
circuli quadrans. Ducatur radius AF
et per punctum F recta ST parallela
lateri AB. Si concipiatur quadratum ABCL
cum triangulo ALC, et cum circuli
quadrante ALB, ita revolvi circa latus
immobile AL, donec redeat ad positionem
ex qua discesserat, in ea revolutione



quadratum ABCL (defin: 10) describet cilindrum, triangulum rectangulum ALC (defin: 12) describet conum, et quadrans ALB (defin: 13) emispherium describet: Atque cilindrus (cor: prop: 10) componitur ex totidem circulis aequalibus habentibus radios aequales AB, ST, LC, quot sunt elementa, seu puncta in perpendiculari AL, conus etiam constituitur ab aequali numero circulorum decrescentium (cor: 3 prop: 11) ad L usque ad punctum A, quorum radii sunt recta LC, SR ea: scilicet elementa trianguli ALC, similiter emispherium componitur ex totidem circulis habentibus radios AB, SF' ea: decrescentes a puncto A, usque ad L; consequenter tria descripta corpora ab aequali numero elementorum seu planorum circulorum componuntur. Sit jam ST radius unius ex aequalibus circulis constituentibus cilindrum, erit SF' radius respondentis circuli in emispherio, et SR erit radius respon=dentis circuli in cono, quoniam vero circuli (cor: 4 prop: 2 libri 5) sunt inter se ut quadrata radiorum, ideo circuli descripti a radio ST in cilindro a radio SF' in emispherio, et a radio SR in cono erunt inter se, ut quadrata radiorum ST, SF', SR, sed (construc:) est ST=AB, et AB=AF', idcirco (axio: 1) erit ST=AF', et (cor: prop: 7 libri 3) est

AL:LC=AS:SR, atque (hypoten) est AL=LC ideoque erit etiam AS=SR; unde pro lineis

ST, SR substituantur aequales rectae AF, AS, et circuli descripti a radiis ST, SF, SR, qui (demonstr:) sunt inter se ut quadrata eorundem radiorum, erunt etiam inter se sicuti quadrata rectarum AF, SF, AS, atqui (cor: 1 prop: 19. libri 3) est
$AF^2 = SF^2 + AS^2$ ergo etiam circulus a radio ST in cilindro descriptus aequalis erit duobus circulis a radiis SF in emispherio et SR in cono descriptis. Itaque si ex circulo a radio ST descripto in cilindro, auferatur circulus a radio SR in cono descriptus, remanebit circulus a radio SF in emispherio descriptus.
Idem verificatur de singulis respondentibus circulis supradicta solida constituentibus, ergo si a soliditate cilindri subtrahatur soliditas coni, relinquetur soliditas emispherii. Est autem conus (cor: 1 prop: 13.) tertia pars cilindri aeque alti, et ejusdem basis; ideoque emispherium aequale erit reliquis duabus tertiis partibus ejusdem cilindri sibi circumscripti.
Quod de emispherio demonstravimus item intelligatur de ejus duplo, sive de integra sphera, cujus cilindrus circumscriptus etiam duplus est cilindri emispherio circumscripti. Itaque spherae soliditas aequalis est duabus tertiis partibus cilindri circumscripti.
Quod erat ostendum.
Est Archimedis corolarium prop: 32 libri de sphera, et cilindro.

Corolarium primum

Ergo sphera est ad cilindrum sibi circumscriptum sicuti 2:3, et invertendo cilindrus est ad spheram sibi inscriptam sicuti 3:2.

Corrolarium 2dum.

Quapropter (cor: prop: 10) inventa soliditate cilindri circumscripti, si ex ejusdem cilindri soliditate dematur tertia pars, remanebit sphere soliditas.

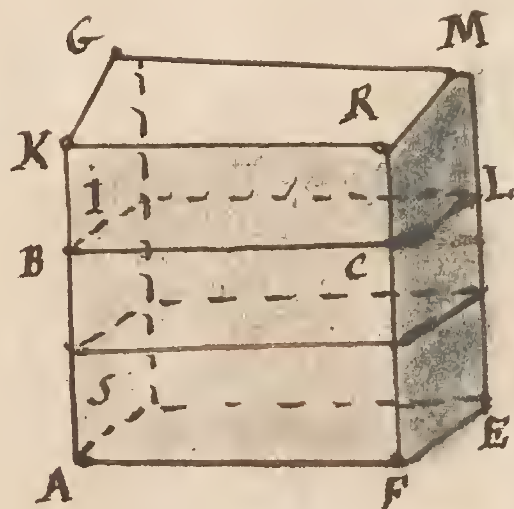
Propositio 20ma

Theorema

Sphera sunt inter se in ratione triplicata, idest ut cubi diametrorum.

Demonstratio

Omnes cilindri spheris circumscripti (defin: 20ma) habent diametrorum basium aequales altitudinibus, ideoque (defin: 17) sunt similes. Cilindri autem similes (cor: 3 prop: 17) sunt inter se, ut cubi diametrorum basium. Praeterea quia (prop: antec) cilindrus semper est ad spheram sibi inscriptam, sicuti 3:2, ideo (axio: 1) quilibet cilindrus est ad spheram sibi inscriptam, sicuti alius cilindrus ad spheram sibi inscriptam, et alternando, erit cilindrus ad alium similem cilindrum sicuti sphera in primo inscripta ad spheram inscriptam in altero. Cilindri vero sunt inter se, ut cubi diametrorum basium; ergo (axio: 1) etiam sphere erunt inter se ut cubi suarum diametrorum, quae (defin: 20.) diametros basium eorundem cilindrorum



adaequent, sive erunt inter se ut cubi radiorum, cum (cor: 1 prop: 13 libri 7.) radiorum, et diametrorum ratio eadem sit. ergo sphaerae etc. Quod erat ostendendum.
Et prop: 18 libri 12 Euclidis

Corrolarium

Ergo sphaera, cujus diameter sit 2 ad sphaeram, cujus diameter sit 6 erit ut 8 ad 216. sed est
8: 216 = 1: 27, ideo diameter tripla, seu quod idem est radius triplus producit sphaeram vigintiseptem vices majorem, similiter radius quintuplus describit sphaeram 125 vices majorem sphaera descripta radio simplo etc.

Scholium

Mensurae nostrates, quibus utimur ad dimetienda solida, sunt cubi mensurarum linealium (cor: defin: 36 libri 2.) scilicet uncia cubica, hoc est cubus habens longitudinem unius unciae latitudinem etiam unius unciae et altitudinem pariter unius unciae.
Pes cubicus sive cubus unius pedis, et quadrati escapeda cubica etc.
Itaque si prismatis AM longitudo AF fuerit unciarum 6, et latitudo FE (perpendicularis longitudini AF) fuerit unciarum 4 aream basis AFES (cor: prop: 31 libri 2.) erit 24 unciarum quadratarum, altitudo AK sit unciarum

20 multiplicando basim inventam 24 per altitudinem 20 (prop: 10) productum 480 erit soliditas dicti prismatis AM, nimirum continebit quadringentas octoginta unitates cubicas.

Similiter si diameter circuli basis cilindri fuerit subjectum 42 erit peripheria (scholio prop: 6 libri 5). erit unciarum 132, et Area ejusdem circuli (cor: 2 prop: 6: libri 5) erit unciarum quadratarum 1386; altitudo cilindri sit pariter unciarum linearium 42; atque (cor: prop: 10) erit soliditas unciarum cubicarum 42×1386 scilicet continebit 58212, uncias cubicas. Quia vero cilindrus habens altitudinem aequalem diametro basi (defin: 20) circumscriptus esse potest sphere, quae habeat aequalem diametrum, seu axem, et sphere soliditas (prop: 19) adaequat duas tertias partes circumscripti cilindri, ideo sphera habentis diametrum unciarum 42, soliditas conti=nebit duas tertias partes inventi cilindri habentis soliditatem 58212 unciarum cubicarum: nimirum ejusdem sphere soliditas erit unciarum cubicarum 38808 ipsa vero sphere soliditas etiam obtinetur multiplicando 1386 (aream basis cilindri seu circuli maximi sphere) per duas tertias partes altitudinis, seu diametri ipsius sphere, scilicet per 28; etenim 28×1386=38808; praeterea si sumatur

quarta pars duarum tertiarum partium, scilicet sexta pars diametri 42, et multiplicet per quadruplum inventi circuli maximi 1386 habebitur eadem sphaerae soliditas, nam est $7 \times 5544 = 38808$.

FINIS

